№ФАРМ-18

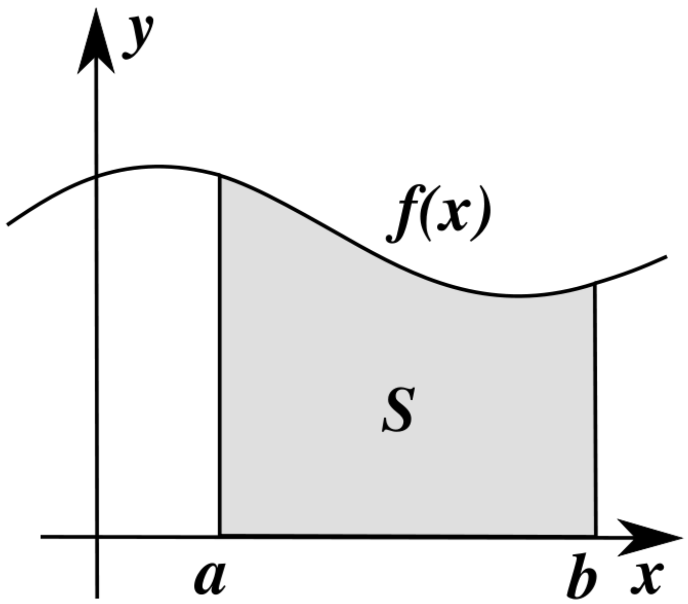
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-ОСЕТИНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ МЕДИЦИНСКАЯ АКАДЕМИЯ»
Министерства здравоохранения Российской Федерации

КАФЕДРА ХИМИИ И ФИЗИКИ

Методические материалы
по матиматике
Основной профессиональной образовательной программы высшего образования-программы специалитета по специальности 33.05.01Фармация,утвержденной 31.08.2020г.

Р У К О В О Д С Т В О

К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ
ПО
МАТЕМАТИКЕ



ВЛАДИКАВКАЗ – 2020

Составитель:

канд. пед. наук, доцент *Боциева Н.И.*

Рецензенты:

зав. кафедрой физики конденсированного состояния
ФГБОУ ВО «Северо−Осетинский государственный университет
им. К.Л. Хетагурова»
д.ф.−м.н., проф. *Магкоев Т.Т.*

зав. кафедрой биохимии ФГБОУ ВО СОГМА Минздрава России
к.м.н., доц. *Гурина А.Е.*

Пособие содержит учебно-методические материалы к практическим занятиям по математике.

Для студентов фармацевтического факультета

Рекомендовано к изданию ЦКУМС
ФГБОУ ВО СОГМА Минздрава России
«12» февраля 2020 г., протокол №3

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ, ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

1. Научно-методическое обоснование темы:

При изучении различных процессов и явлений – физических, химических, биологических и др. – часто приходится иметь дело с величинами, связанными между собой зависимостью того или иного вида. Например, ускорение движения материальной точки зависит от приложенных к ней сил и от ее массы, скорость химической реакции – от температуры, давление газа – от его объема, температуры и плотности, скорость размножения бактерий – от условий окружающей среды, которые также могут быть охарактеризованы некоторыми величинами.

Одним из важнейших видов зависимостей между величинами является функциональная зависимость.

2. Теория:

1. Функциональная зависимость

Две величины x и y называют связанными функциональной зависимостью, если каждому допустимому значению x по определенному закону соответствует одно вполне определенное значение y.

Величину y называют *функцией*, а величину x — ее *аргументом*. Аналитически (т.е. с помощью формулы) функциональную зависимость y от x обозначают, например, следующим образом: $y = f(x)$.

Функциональную зависимость можно также задать с помощью таблицы или графика.

Допустимыми значениями аргумента считают такие, которым соответствуют действительные значения функции.

Множество всех допустимых значений аргумента называют *областью определения функции*, а множество всех соответствующих значений функции — ее *областью значений*.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на интервале (a, b) , если для любых двух значений x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу и удовлетворяющих неравенству $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, и *убывающей*, если при этих же условиях выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция во всей области своего определения только возрастает или только убывает, то она называется *монотонной*.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для всех значений x, принадлежащих области определения функции, выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если для всех значений x, принадлежащих области определения функции, выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Графики четных функций симметричны относительно оси ординат, нечетных — относительно начала координат.

Если для всех значений x, принадлежащих области определения функции, выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$, то функция $y = f(x)$ называется *периодической с периодом* T.

Функция $x = \mathrm{g}(y)$ называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$, если она является решением уравнения $f(x) = y$ относительно x.

В отличие от функции вида $y = f(x)$, которая называется *явной* (заданной в явном виде), функция y, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, т.е. уравнением, не разрешенным относительно переменной y, называется *неявной.*

Сложной функцией называется функция, аргумент которой также является функцией, т. е. $F(x) = f(\varphi(x))$. Чтобы найти значение в точке x сложной функции $f(\varphi(x))$, составленной из функций f и φ, следует сначала найти частное значение $u = \varphi(x)$ внутренней функции φ, а затем подставить его в качестве аргумента во внешнюю функцию f.

2. Элементарные функции

Рассмотрим основные элементарные функции.

1) *Степенная функция* $y = x^n$ при целом n определена на всей оси; четная, если n четное, и нечетная, если n нечетное. При произвольном n рассматривается в области $x > 0$. Если $n > 0$, то графики функции $y = x^n$ возрастают от нуля до бесконечности в интервале $(0, +\infty)$, проходят через точки (0 , 0) и (1 , 1) и разделяются прямой $y = x$ на кривые, обращенные выпуклостью вниз при $n > 1$ и вверх при $0 < n < 1$ (рис.1).

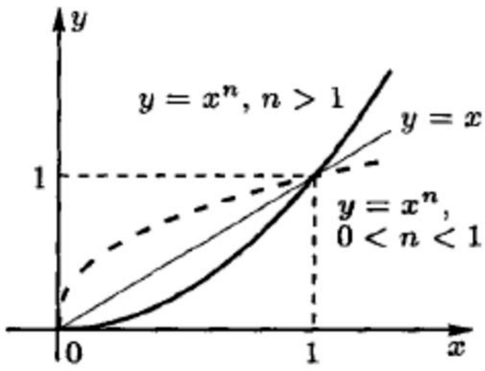


Рис.1. График функции $y = x^n, n > 0$.

Если $n < 0$, то график функции $y = x^n = (1/x)^{|n|}$ убывает от бесконечности до нуля (рис.2). Обратной к функции $y = x^n$, $x > 0$, является функция $y = x^{1/n}$.

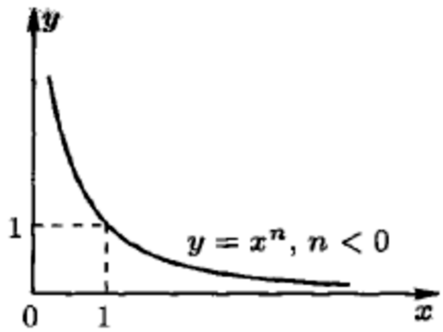


Рис.2. График функции $y = x^n, n < 0$.

2) *Показательная* $y = a^x$, $-\infty < x < \infty$, и *логарифмическая* $y = \log_a x$, $x > 0$, функции при одном и том же параметре a являются взаимно обратными. Их графики симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (рис. 3).

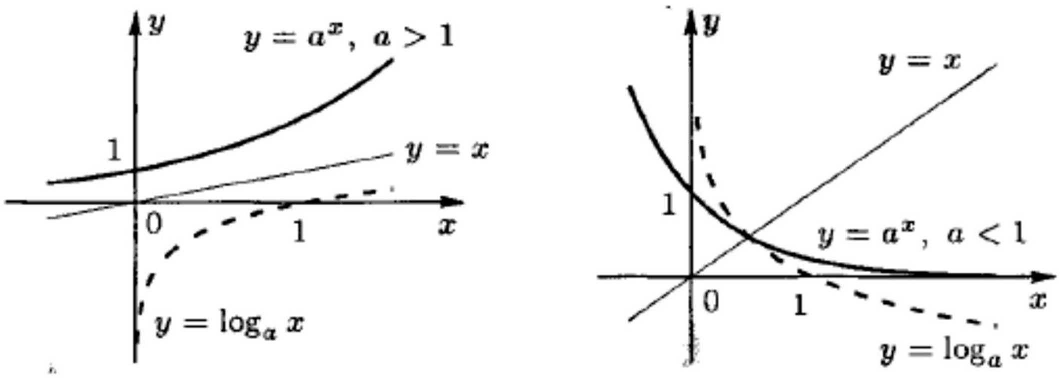


Рис. 3. Графики показательной и логарифмической функций.

Показательная функция всегда положительна, поэтому ее график расположен над осью *OX*. Кроме того, поскольку $a^0 = 1$, он проходит через точку (0,1). При $a > 1$ показательная функция возрастает от нуля до бесконечности, при $a < 1$ — убывает от бесконечности до нуля. Отметим, что график показательной функции с основанием a симметричен относительно оси OY графику показательной функции с основанием $1/a$, что следует из равенства $(1/a)^x = a^{-x}$.

Функция $y = e^x$ ($e = 2{,}71828\ldots$) называется *экспоненциальной*, а ее график — *экспонентой* (см. рис.4) ; логарифмы с основанием e обозначают через $\ln x$ и называют *натуральными.* Логарифмы с основанием 10 обозначают через $\lg x$ и называют *десятичными.* Таким образом, $\log_e x = \ln x$, $\log_{10} x = \lg x$.

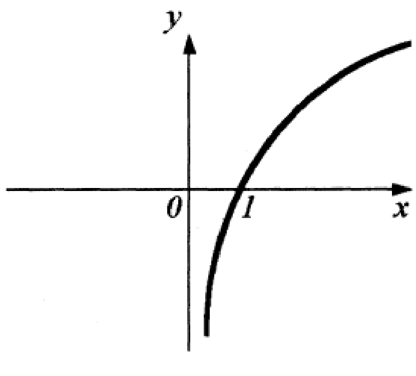


Рис.4. График функции $y = \ln x$.

3) *Тригонометрические функции* являются периодическими: $y = \sin x$ и $y = \cos x$ имеют период 2π (см.рис.5), а $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ – период π (см. рис.6 и рис.7).

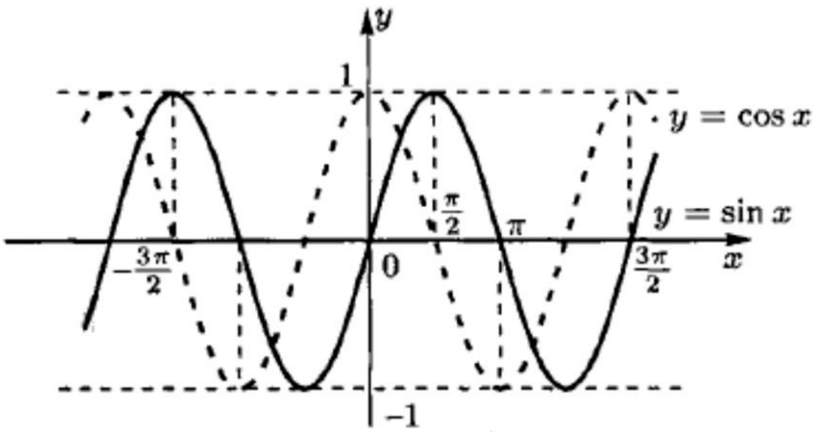


Рис.5. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

График косинусоиды отличается от графика синусоиды сдвигом влево по оси OX на $\pi/2$, поскольку $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.

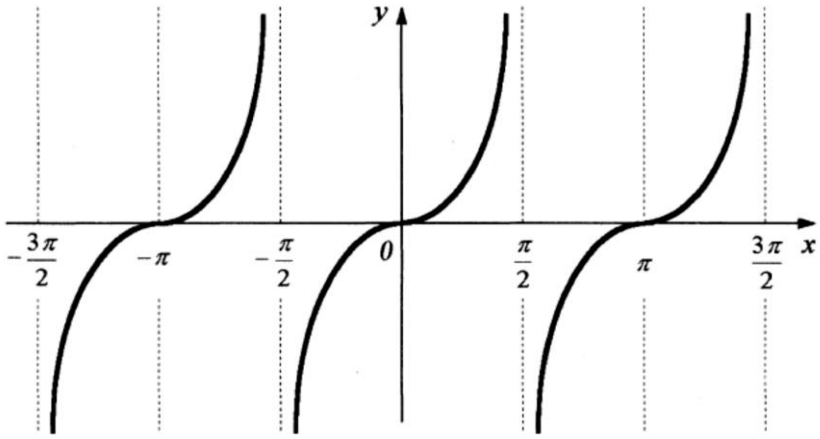


Рис.6. График функции $y = \text{tg}\, x$.

Функции $\sin x$, $\text{tg}\, x$ и $\text{ctg}\, x$ являются нечетными, а функция $\cos x$ – четная. $\sin x$ и $\cos x$ определены при любом x, $\text{tg}\, x$ — при всех x, кроме точек вида $(2k+1)\,\pi/2$ где k — любое целое число, а $\text{ctg}\, x$ — при всех x, кроме точек вида $k\pi$.

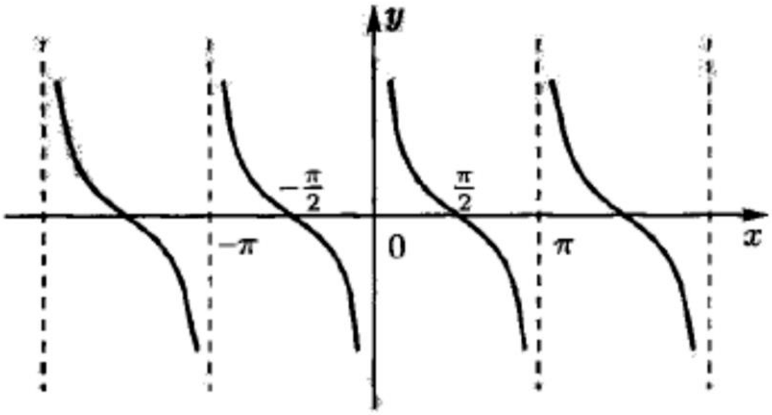


Рис.7. График функции $y = \text{ctg}\, x$.

4) *Обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$ и $y = \operatorname{arctg} x$ $-$ нечетные, а $y = \arccos x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ не являются ни четными, ни нечетными.

Областью определения функции $y = \arcsin x$ является множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку $[-1;+1]$, областью значений этой функции — множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$.

Областью определения функции $y = \arccos x$ является множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку $[-1;\ +1]$, областью значений — множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку $[0;\pi]$.

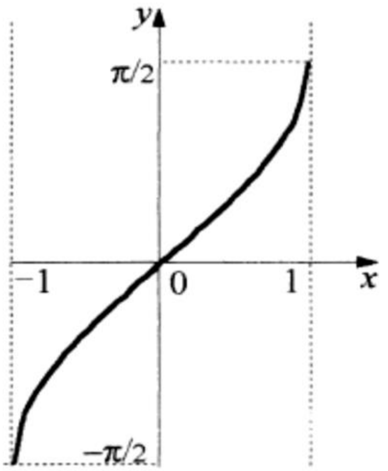


Рис.8. График функции $y = \arcsin x$.

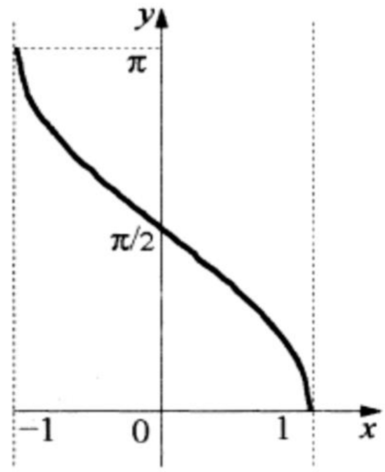


Рис.9. График функции $y = \arccos x$.

Областью определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ является множество всех действительных чисел, областью значений — множество всех действительных чисел, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right)$.

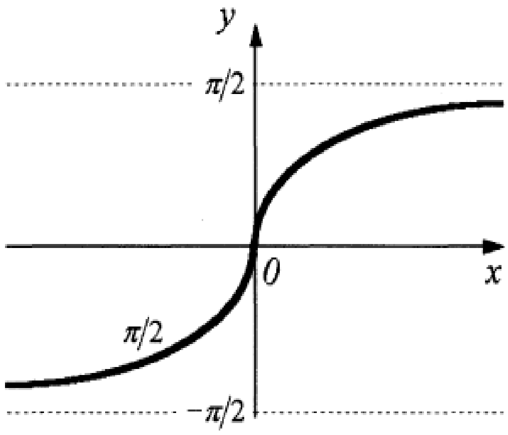


Рис.10. График функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Областью определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$ является множество всех действительных чисел, областью значений — множество всех действительных чисел, принадлежащих интервалу $(0;\pi)$.

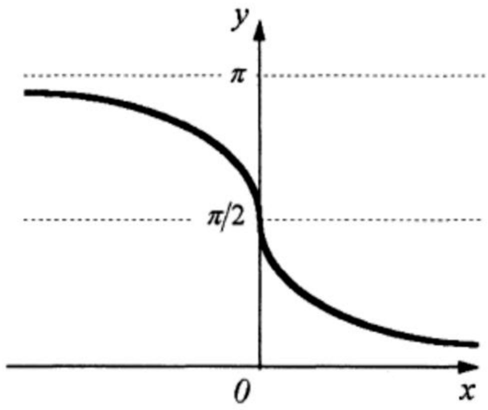


Рис.11. График функции $y = \text{arcctg}\, x$.

3. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Непрерывность функции

Теория пределов играет основополагающую роль в математическом анализе. С ее помощью устанавливаются такие свойства функции, как непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость и т.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0. Число b называется *пределом функции в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε, как бы мало оно не было, можно найти такое положительное δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Записывают следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Среди функций, имеющих пределы, выделяют класс функций, имеющих предел, равный 0. Такие *функции называются бесконечно малыми функциями или бесконечно малыми величинами* и обозначаются α, β, γ и т.д .

При вычислении пределов используется понятие эквивалентности бесконечно малых величин.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые. Если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*.

В приводимых ниже основных теоремах о пределах будем считать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют общую область определения, содержащую точку x_0, и имеют пределы в этой точке.

Теорема 1. *Предел суммы двух функций равен сумме их пределов:*

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+\varphi(x)\big)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\,.$$

Теорема 2. *Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:*

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot\varphi(x)\big)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\,.$$

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim_{x\to x_0}\big(\,\mathrm{c}\,f(x)\big)=\mathrm{c}\lim_{x\to x_0}f(x)\,.$$

Теорема 3. *Предел отношения двух функций равен отношению пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от* 0:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}\,.$$

Если при применении основных теорем о пределах функции получаем выражения вида [0/0], $[\infty/\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $[1^{\infty}]$, $[0^{0}]$, $[\infty^{0}]$, которые носят название неопределенностей, то требуются специальные методы для получения ответа (раскрытие неопределенности).

Для решения примеров используются следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e=2{,}71828\,...$$

(*первый и второй замечательные пределы*).

Пример. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\ \ (\text{неопределенность вида } [0/0]\,.$$

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{x+4}+2$ (сопряженное выражение). Воспользуемся формулой $a^2+b^2=(a-b)(a+b)$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в интервале $[a, b]$. Пусть x_0 и x — два произвольных значения из этого интервала. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, откуда $x = x_0 + \Delta x$.

Говорят, что для перехода от значения аргумента x_0 к значению x первоначальному значению придано приращение Δx.

Приращением Δy *функции* $y = f(x)$, соответствующим приращению Δx аргумента x в точке x_0, называется разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* $x = x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Определение непрерывности функции в точке можно сформулировать также следующим образом: функция называется непрерывной в данной точке, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

При этом предполагается, что бесконечно малая величина Δx принимает лишь те значения, для которых $f(x_0 + \Delta x)$ имеет смысл.

Оба определения непрерывности функции в точке эквивалентны.

Функция $f(x)$ *называется непрерывной в интервале*, если эта функция непрерывна в каждой точке этого интервала.

3. Цель деятельности студентов на занятии:

Студент должен знать:

1. Определение функции.
2. Формулы и графики основных элементарных функций.
3. Определение предела функции.
4. Понятие непрерывности функции в точке.
5. Теоремы о пределах.
6. Основные способы вычисления пределов.

Студент должен уметь:

1. Строить графики основных элементарных функций.
2. Вычислять пределы функций, используя:
   a) разложение функций на множители;
   b) деление функций на аргумент;
   c) умножение и деление функции на сопряженное выражение;
   d) замечательные пределы.

4. Содержание обучения:

Теоретическая часть:

1.Определение функции. Основные элементарные функции.

2.Понятие предела функции.

3.Основные теоремы о пределах.

4.Основные способы нахождения пределов.

Практическая часть:

1.Вычислите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-1}{3x^3-x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{2x^2+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+x+1)$.

2.Используя разложение функций на множители, вычислите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}$.

3.Использую деление на аргумент, вычислите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{3x^3-2x^2+x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+4}{2x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}$.

4.Производя деление и умножение функции на сопряженное выражение, вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3}-x)$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$.

5.Используя замечательные пределы, вычислите пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg3x$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\sin x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$.

5. Перечень вопросов для проверки исходного уровня знаний:

1. Дайте определение функции.
2. Запишите формулы основных элементарных функций.
3. Дайте определение предела функции.
4. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

6. Перечень вопросов для проверки конечного уровня знаний:

1. Что называется неопределенностью? Какие виды неопределенностей известны?
2. Как «раскрыть неопределенность»? Приведите примеры.
3. Запишите замечательные пределы.
4. В чем заключается условие непрерывности функции в точке? Что называется точкой разрыва функции?

7. Хронокарта учебного занятия:

1. Организационный момент – 5 мин.
2. Разбор темы –15 мин.
3. Решение примеров и задач ─ 45 мин.
4. Текущий контроль знаний ─ 20 мин.
5. Подведение итогов занятия – 5 мин.

8. Перечень учебной литературы к занятию:

1. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. М., «Медицина», 2010, §§ 1.1, 1.2.
2. Павлушков И.В. и др. Основы высшей математики и математической статистики. М., «ГЭОТАР-Медиа», 2008, §§1.1, 1.2.

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ К РЕШЕНИЮ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

1. Научно-методическое обоснование темы:

Понятия производной и дифференциала являются одними из основных понятий математического анализа. Вычисление производных необходимо при решении многих задач в физике и математике (нахождение скорости, ускорения, давления и т. д.). Важность понятия производной, в частности, определяется тем, что производная функции характеризует скорость изменения этой функции при изменении ее аргумента.

Применение дифференциала позволяет осуществить приближенные вычисления, а также проводить оценку погрешностей.

2. Теория:

1.Задачи, приводящие к понятию производной

1.*Задача о нахождении скорости v материальной точки*. Пусть материальная точка движется по прямолинейной траектории, которую примем за ось OX (рис. 1).

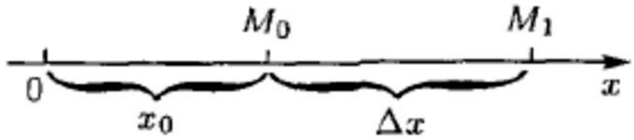


Рис. 1. Движение точки вдоль прямолинейной траектории.

Положение точки на траектории будет тогда определяться ее абсциссой x, которая является функцией времени t: $x = f(t)$.

Пусть в момент времени t_0 движущаяся точка занимала на траектории положение M_0 и имела абсциссу x_0, а через промежуток времени Δt переместилась в положение M_1 и имеет абсциссу $x_0 + \Delta x$. Таким образом, если за время Δt точка не меняла направление движения, то $|\Delta x|$ — путь, пройденный точкой за время Δt.

Очевидно, что $\Delta x = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Назовем средней скоростью движения точки за время Δt отношение $\Delta x/\Delta t$.

Мгновенной скоростью движения точки в момент времени t_0 назовем предел v, к которому стремится средняя скорость точки за промежуток времени Δt, когда $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}, \qquad (1)$$

Таким образом, для нахождения мгновенной скорости материальной точки необходимо вычислить предел отношения приращения функции Δx к приращению аргумента Δt при условии, что $\Delta t \to 0$.

2. *Задача о нахождении угла наклона касательной к графику функции*. Рассмотрим график некоторой функции $y = f(x)$ (рис.2). В точке M_0 к графику функции проведем

касательную, образующую с положительным направлением оси OX угол φ_0. Найдем φ_0.

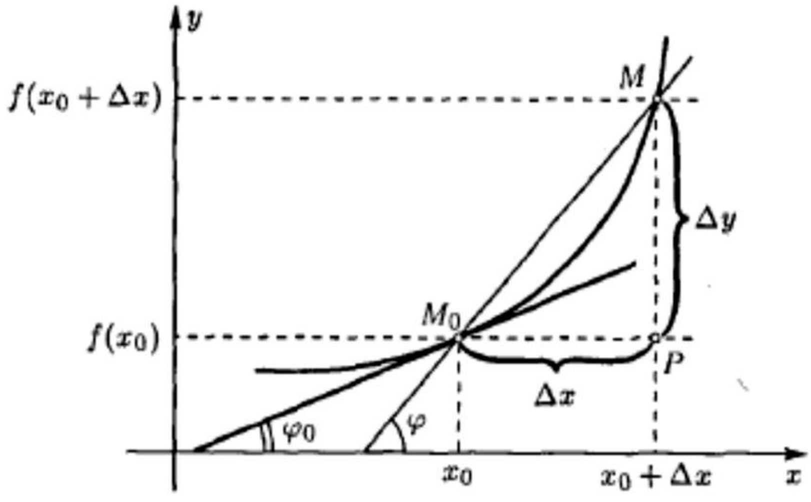


Рис. 2.

Для этого на графике выберем произвольную точку M и проведем секущую MM_0. Она наклонена к оси OX под углом φ. Рассмотрим ΔM_0MP: ,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MP}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (2)$$

Если точку M_0 фиксировать, а точку M приближать к M_0, то секущая MM_0 будет переходить в касательную к графику функции в точке M_0 и можно записать:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (3)$$

Таким образом, необходимо вычислить предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю.

Предел отношения приращения Δy *функции* $y = f(x)$ *к приращению аргумента* Δx *в заданной точке* x_0 *при стремлении* Δx *к нулю и при условии, что этот предел существует, называется производной функции в точке* x_0 .

Обозначения производной: *y', f '(x),* $\frac{dy}{dx}$. По определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (4)$$

Нахождение производной данной функции называется ее *дифференцированием*. Дифференцирование основных элементарных функций производится по готовым формулам (см. табл.1), а также с помощью *правил*:

1. *Производная алгебраической суммы функций равна сумме производных этих функций:*

$$(u+\upsilon)' = u' + \upsilon'$$

2. *Производная произведения двух функций равна сумме произведений второй функции на производную первой и первой функции на производную второй:*

$$(u \cdot \upsilon)' = u'\upsilon + u\,\upsilon'$$

3. *Производная частного двух функций равна дроби, числитель которой есть разность между произведениями знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а знаменатель - квадрат знаменателя:*

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}$$

Физический смысл производной. Из сравнения (4) и (1) следует, что *мгновенная скорость прямолинейного движения материальной точки равна производной зависимости ее координаты от времени.*

Общий смысл производной функции заключается в том, что она характеризует *скорость (быстроту) изменения функции* при данном изменении аргумента. Быстрота протекания физических, химических и других процессов, например скорость охлаждения тела, скорость химической реакции, скорость размножения бактерий и т.п., также выражается при помощи производной.

Геометрический смысл производной. Величину тангенса угла наклона касательной, проведенной к графику функции, в математике называют *угловым коэффициентом касательной.*

Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику дифференцируемой функции в некоторой точке, численно равен производной функции в данной точке.

Это утверждение называют *геометрическим смыслом производной.*

2. Производная сложной функции

Из элементарных функций образуются *сложные* функции. Допустим, задана функция $y=f(u)$, где u в свою очередь зависит от x, т.е. $u=\varphi(x)$. Тогда, при изменении x будут меняться u и y. В этом случае заданная функция $y=f(u)$ называется *сложной* и обозначается $y=f\,[\varphi(x)]$. Величина u называется *промежуточной* переменной.

Тогда производная y'_x (по x) равна произведению производной y'_u (по u) на производную u'_x (по x) :

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (5)$$

Пример 1. Найти производную функции $y=e^{kx}$.

Решение. Обозначим $u=kx$, тогда $y=e^u$. Находим производную $y'_u = e^u$. Подставим значение $u=kx$, тогда $y'_u = e^{kx}$. Находим $u'_x=k$.

Ответ. $y' = y'_u \cdot u'_x = k\,e^{kx}$

Таблица 1. Производные основных элементарных функций

1.	$(C)' = 0$, где $C = const$.
2.	$(x)' = 1$.
3.	$(x^n)' = nx^{n-1}$.
4.	$(a^x)' = a^x \ln a$, при $a > 0$ и $a \neq 1$.
4a.	$(e^x)' = e^x$.
5.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, при $a > 0$ и $a \neq 1$.
5a.	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
6.	$(\sin x)' = \cos x$.
7.	$(\cos x)' = -\sin x$.
8.	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
9.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
10.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12.	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
13.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Производные высших порядков

Если производная $y' = \varphi(x)$ от функции $y = f(x)$ дифференцируема, то от нее, в свою очередь, можно вычислить производную, которая называется *производной второго порядка* или *второй производной* от заданной функции по аргументу x. Ее обозначение y'',

$\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$. Возможно образование производных и более высоких порядков: y''', (или $\frac{d^3y}{dx^3}$) и т.д.

Производная второго порядка от заданной функции $y = f(x)$ вычисляется путем последовательного двукратного дифференцирования заданной функции по общим правилам:

$$y = f(x);\ y' = f'(x) = \varphi(x);\ y'' = f''(x) = \varphi'(x).$$

Пример 2. $y = x^4$, $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$.

Физический смысл производной второго порядка – это *мгновенное (в заданный момент времени) значение ускорения при прямолинейном неравномерном движении тела*.

Действительно, скорость $\upsilon = \frac{dS}{dt}$, а ускорение есть изменение скорости, т.е.

$$a = \upsilon' = S'' \text{ или } a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Пример 3. Задано уравнение движения тела $S = 2t^2$ (м). Найти скорость и ускорение через 5 с после начала движения.

Решение. Скорость $\upsilon = \frac{dS}{dt} = 4t = 20 м/с$. Ускорение $a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = 4 м/с^2$.

4. Дифференциал функции

Из уравнения (4) можно записать равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \beta, \qquad (6)$$

где β - некоторая бесконечная малая величина. При $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$, т.е. β тоже стремится к нулю. Преобразовав (6) имеем:

$$\Delta y = y'\Delta x + \beta\Delta x, \qquad (7)$$

Из (7) видно, что приращение функции состоит из двух слагаемых. Слагаемое $y'\Delta x$ называют *главной частью приращения функции* $y = f(x)$ или *дифференциалом функции.*

Дифференциал функции равен произведению производной функции на приращение аргумента и символически обозначается dy:

$$dy = y'\Delta x, \qquad (8)$$

Таким образом, *дифференциал функции, в общем случае отличаясь от приращения функции, представляет собой главную часть этого приращения, линейную относительно приращения аргумента.* В этом заключается *аналитический смысл дифференциала.*

Отсюда следует, что при достаточно малых приращениях аргумента величина приращения функции приближенно равна дифференциалу этой функции:

$$\Delta y \approx dy, \tag{9}$$

Для выяснения геометрического смысла дифференциала рассмотрим график функции $y = f(x)$, изображенный на рис.3. В точке A проведем касательную. Рассмотрим ΔDAC. Катет AC равен приращению аргумента Δx; $\operatorname{tg}\varphi = y'$; $DC = \operatorname{tg}\varphi AC = y'\Delta x$. Итак, $DC = dy$.

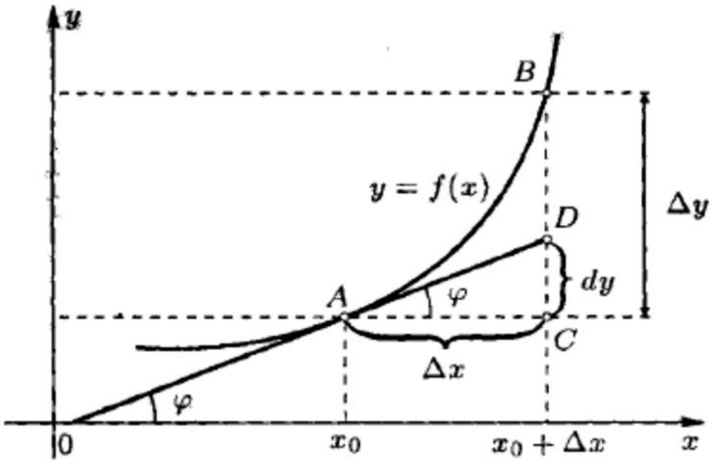


Рис. 3. Геометрический смысл дифференциала.

Таким образом, *дифференциал функции является приращением ординаты касательной* (DC), *которое соответствует приращению* Δx (AC) *абсциссы.* В этом заключается *геометрический смысл дифференциала.*

Дифференциалом аргумента называют приращение аргумента, т.е.

$$dx = \Delta x, \tag{10}$$

С учетом (10) можно записать:

$$dy = y'dx, \tag{11}$$

5. Применение дифференциала функции в приближенных вычислениях

Применение дифференциала функции в приближенных вычислениях основано на использовании формулы (9), которая справедлива при достаточно малых приращениях аргумента функции $y = f(x)$. Если в этой формуле приращение Δy представить в виде $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, а дифференциал в виде $dy = f'(x)\cdot\Delta x$, то будем иметь:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\cdot\Delta x,$$

откуда

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x, \qquad (12)$$

Формулу (12) можно использовать при нахождении приближенных значений функций.

Пример 4. Найти приближенно значение функции

$$f(x) = \sqrt{x}$$

для значения ее аргумента, равного 16,02.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

и подставим в формулу (12):

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x.$$

Положим $x = 16$, а $\Delta x = 0{,}02$. Тогда

$$f(16{,}02) = f(16+0{,}02) \approx f(16) + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0{,}02 \approx \sqrt{16} + 0{,}0025 \approx 4{,}0025.$$

3. Цель деятельности студентов на занятии:

Студент должен знать:

1. Определение производной функции.
2. Физический и геометрический смыслы производной.
3. Таблицу производных основных элементарных функций.
4. Правила дифференцирования.
5. Определение дифференциала функции.
6. Понятие дифференциала аргумента.
7. Правила для вычисления дифференциалов функций.
8. Формулу для вычисления приближенных значений функций с помощью дифференциала.

Студент должен уметь:

1. Вычислять производные и дифференциалы функций.
2. Применять дифференциал функции в приближенных вычислениях.

4. Содержание обучения:

Теоретическая часть:

1. Задачи, приводящие к понятию производной функции:
   a) задача о нахождении мгновенной скорости прямолинейного неравномерного движения материальной точки;
   b) задача о касательной к кривой.
2. Производная функции. Геометрический и физический смыслы производной.
3. Нахождение производной функции. Таблица производных основных элементарных функций.
4. Основные правила дифференцирования.
5. Производная сложной функции.
6. Производные высших порядков.
7. Связь между дифференциалом функции и приращением функции.
8. Геометрический и аналитический смыслы дифференциала.
9. Применение дифференциала функции в приближенных вычислениях.

Практическая часть:

1. Найдите производные и дифференциалы функций:

1) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}$;

2) $y=\frac{x^3}{\sin^3 3x}$;

3) $y=e^{3x+1}$;

4) $\ln\sin x+x^5$;

5) $y=(1+2x+3x^2+4x^3)^5$;

6) $y=e^2+\cos 2x$;

7) $y=\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x}+2$;

8) $y=\arccos x$;

9) $y=\sqrt{\sin 2x}$;

10) $y=e^{\cos x}\sin x$;

11) $y=\frac{e^{2x}}{\cos 2x}$.

12) $y=\sin x\cos x$;

2. Определите ускорение точки в указанные моменты времени, если скорость точки, движущейся прямолинейно, задается уравнениями:

а) $V = t^2 + 2t$, $t = 3$ с ; б) $V = 4\sin\frac{t}{2}$, $t=\frac{\pi}{3}$.

3. Вычислите приращение функции, соответствующее изменению аргумента от x_1 до x_2:

1) $y = 2x^3 - 4x$; $x_1 = 1$; $x_2 = 1,02$;
2) $y = 3x^2 - 2x$; $x_1 = 2$; $x_2 = 2,001$;

5.Перечень вопросов для проверки исходного уровня знаний:

1. Дайте определение производной функции.
2. Сформулируйте основные правила дифференцирования.
3. Запишите формулу производной сложной функции.
4. В чем состоят физический и геометрический смыслы производной функции?
5. Что называется дифференциалом функции?
6. В чем заключается геометрический смысл дифференциала функции?
7. Что называется дифференциалом аргумента?
8. Как выражается производная функции через дифференциал?

6. Перечень вопросов для проверки конечного уровня знаний:

1. В чем состоит физический смысл производной второго порядка?
2. Как связаны мгновенное ускорение материальной точки и зависимость ее координаты от времени?
3. В чем заключается аналитический смысл дифференциала?
4. На чем основано применение дифференциала функции для приближенных вычислений?
5. Как используется дифференциал для вычисления погрешностей?
6. Как находятся дифференциалы второго; высшего порядков?

7. Хронокарта учебного занятия:

1. Организационный момент – 5 мин.
2. Разбор темы –15 мин.
3. Решение примеров и задач – 45 мин.
4. Текущий контроль знаний – 20 мин.
5. Подведение итогов занятия – 5 мин.

8. Перечень учебной литературы к занятию:

1. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. М., «Медицина», 2010, §§ 2.1-2.7, 2.10-2.16.
2. Павлушков И.В. и др. Основы высшей математики и математической статистики. М., «ГЭОТАР-Медиа», 2008, §§2.1, 2.2.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ

1.Научно-методическое обоснование темы:

До сих пор мы рассматривали функции одного аргумента, т.е. функции вида $y = f(x)$. Но в физике, химии, биологии и других науках встречаются ситуации, когда одна из изучаемых величин зависит не от какой–то одной другой, а от нескольких независимых между собой величин. Например, ускорение материальной точки, определяемое вторым законом Ньютона, зависит от двух переменных величин: силы, приложенной к этой точке и ее массы.

2. Теория:

1. Понятие функции двух переменных

Величина z называется *функцией двух независимых переменных* x и y, если каждой паре допустимых значений этих величин по определенному закону соответствует одно вполне определенное значение величины z. Независимые переменные x и y называют *аргументами* функции.

Такая функциональная зависимость аналитически обозначается

$$Z = f(x,y), \qquad (1)$$

Значения аргументов x и y, которым соответствуют действительные значения функции z, считаются *допустимыми*, а множество всех допустимых пар значений x и y называют *областью определения* функции двух переменных.

Для функции нескольких переменных, в отличие от функции одной переменной, вводят понятия ее *частных приращений* по каждому из аргументов и понятие *полного приращения.*

Частным приращением $\Delta_x z$ *функции* $z=f(x,y)$ *по аргументу* x называется приращение, которое получает эта функция, если ее аргумент x получает приращение Δx при неизменном y:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \qquad (2)$$

Частным приращением $\Delta_y z$ *функции* $z=f(x,y)$ *по аргументу* y называется приращение, которое получает эта функция, если ее аргумент y получает приращение Δy при неизменном x:

$$\Delta_y z= f(x, y + \Delta y) – f(x, y) \quad , \qquad (3)$$

Полным приращением Δz функции $z=f(x,y)$ по аргументам x и y называется приращение, которое получает функция, если оба ее аргумента получают приращения:

$$\Delta z= f(x+\Delta x, y+\Delta y) – f(x, y) \quad , \qquad (4)$$

При достаточно малых приращениях Δx и Δy аргументов функции имеет место приближенное равенство:

$$\Delta z \approx \Delta_x z + \Delta_y z \,, \tag{5}$$

причем оно тем точнее, чем меньше Δx и Δy .

2.Частные производные функции двух переменных

Частной производной функции $z=f\,(x, y)$ *по аргументу* x *в точке* (x, y) называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ этой функции к соответствующему приращению Δx аргумента x при стремлении Δx к 0 и при условии , что этот предел существует:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \tag{6}$$

Аналогично определяют производную функции $z=f\,(x, y)$ по аргументу y.

Кроме указанного обозначения, частные производные функции обозначают также $\frac{\partial f}{\partial x}$, z'_x, $f'_x(x, y)$; $\frac{\partial f}{\partial y}$, z'_y, $f'_y(x, y)$.

Основной смысл частной производной состоит в следующем: *частная производная функции нескольких переменных по какому-либо из ее аргументов характеризует скорость изменения данной функции при изменении этого аргумента.*

При вычислении частной производной функции нескольких переменных по какому-либо аргументу все остальные аргументы этой функции считаются постоянными.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$f\,(x, y)= x^2+ y^3$$

Решение. При нахождении частной производной этой функции по аргументу x аргумент y считаем постоянной величиной:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x^2 + y^3)'_x = 2x\,;$$

При нахождении частной производной по аргументу y аргумент x считаем постоянной величиной:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + y^3)'_y = 3y^2\,.$$

3. Частные и полный дифференциалы функции нескольких переменных

Частным дифференциалом функции нескольких переменных по какому-либо из ее аргументов называется произведение частной производной этой функции по данному аргументу на дифференциал этого аргумента:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx\,, \tag{7}$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{8}$$

Здесь $d_x z$ и $d_y z$ -частные дифференциалы функции $z = f(x, y)$ по аргументам x и y. При этом

$$dx = \Delta x; \quad dy = \Delta y, \tag{9}$$

Полным дифференциалом функции нескольких переменных называется сумма ее частных дифференциалов:

$$dz = d_x z + d_y z, \tag{10}$$

Пример 2. Найдем частные и полный дифференциалы функции $f(x, y) = x^2 + y^3$. Так как частные производные этой функции найдены в примере 1, то получаем

$$d_x z = 2xdx; \qquad d_y z = 3y^2 dy;$$

$$dz = 2xdx + 3y^2 dy$$

Частный дифференциал функции нескольких переменных по каждому из ее аргументов является главной частью соответствующего частного приращения функции.

Вследствие этого можно записать:

$$\Delta_x z \approx d_x z, \qquad \Delta_y z \approx d_y z, \tag{11}$$

Аналитический смысл полного дифференциала заключается в том, что полный дифференциал функции нескольких переменных представляет собой главную часть полного приращения этой функции.

Таким образом, имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz, \tag{12}$$

На использовании формулы (12) основано применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.

Представим приращение Δz в виде

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x, y)$$

а полный дифференциал в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Тогда получаем:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y,$$

откуда

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y, \qquad (13)$$

3.Цель деятельности студентов на занятии:

Студент должен знать:

1. Определение функции двух переменных.
2. Понятие частного и полного приращения функции двух переменных.
3. Определение частной производной функции нескольких переменных.
4. Физический смысл частной производной функции нескольких переменных по какому- либо из ее аргументов.
5. Определение частного дифференциала функции нескольких переменных.
6. Определение полного дифференциала функции нескольких переменных.
7. Аналитический смысл полного дифференциала.

Студент должен уметь:

1. Находить частные и полное приращение функции двух переменных.
2. Вычислять частные производные функции нескольких переменных.
3. Находить частные и полные дифференциалы функции нескольких переменных.
4. Применять полный дифференциал функции нескольких переменных в приближенных вычислениях.

4.Содержание обучения:

Теоретическая часть:

1. Понятие функции нескольких переменных.
2. Функция двух переменных. Частное и полное приращение функции двух переменных.
3. Частная производная функции нескольких переменных.
4. Частные дифференциалы функции нескольких переменных.
5. Полный дифференциал функции нескольких переменных.
6. Применение полного дифференциала функции нескольких переменных в приближенных вычислениях.

Практическая часть:

1.Найдите частные производные функций:

1) $z=\sqrt{x^3+y^2}$;

2) $z= e^{xy+2x}$;

3) $z= x^2\sin^2 y$;

4) $z=\sqrt{x^2\sin^2 x}$;

5) $z= 2\operatorname{tg} xe^y$;

6) $z=\ln(x^2-y^3)$.

2. Найдите частные и полные дифференциалы функций:

1) $z=x\sin y$;

2) $z=\ln(\frac{x^2}{y}+1)$;

3) $z=e^{xy+x^2}$;

4) $z=xy\ln(xy)$;

5) $z=arctg\frac{xy}{x+y}$;

6) $z=y\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{y}}$.

3.С использованием полного дифференциала найдите приближенно значение функций:
1) $z= (x+y)^2$ при следующих значениях ее аргументов: x =1,02 ; y =1,01.
2) $z= tg\,(xy)$ при следующих значениях ее аргументов: $x =\pi/4+0{,}01$; y =1,01.

5.Перечень вопросов для проверки исходного уровня знаний:

1. Приведите примеры, когда одна из изучаемых величин зависит от нескольких независимых между собой величин.
2. Дайте определение функции двух переменных.
3. Что называется частным и полным приращением?
4. Дайте определение частной производной функции по данному аргументу.
5. Что называется частным и полным дифференциалом функции двух переменных? Как они связаны между собой?

6. Перечень вопросов для проверки конечного уровня знаний:

1. Равно ли в общем случае произвольной функции нескольких переменных ее полное приращение сумме всех частных приращений?
2. В чем состоит основной смысл частной производной функции нескольких переменных по какому-либо из ее аргументов?
3. В чем состоит аналитический смысл полного дифференциала?

7. Хронокарта учебного занятия:

1. Организационный момент – 5 мин.
2. Разбор темы –15 мин.
3. Решение примеров и задач ─ 45 мин.
4. Текущий контроль знаний ─ 20 мин.
5. Подведение итогов занятия – 5 мин.

8. Перечень учебной литературы к занятию:

1. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. М., «Медицина», 2010, §§ 4.1–4.5.
2. Павлушков И.В. и др. Основы высшей математики и математической статистики. М., «ГЭОТАР-Медиа», 2008, § 3.3.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.
ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Научно-методическое обоснование темы:

Способы нахождения производных и дифференциалов функций и их применение составляют основную задачу дифференциального исчисления. Необходимость понятия производной возникает в связи с постановкой задачи о вычислении скорости движения и нахождении угла касательной к кривой. Возможна и обратная задача: по скорости определить пройденный путь, а по тангенсу угла наклона касательной найти соответствующую функцию. Такая обратная задача приводит к понятию неопределенного интеграла.

2. Теория:

1. Понятие неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется *первообразной функции* $f(x)$ на интервале (a,b), если она дифференцируема на этом интервале и в каждой его точке

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

Например, первообразными функции $4x^3$ являются функции x^4 и x^4+6, так как

$$(x^4)'=4x^3 \quad \text{и} \quad (x^4+6)'=4x^3.$$

Заметим, что вообще, если $F(x)$ первообразная $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная, также является первообразной $f(x)$, так как

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x), \tag{2}$$

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$. Он обозначается символом

$$\int f(x)dx$$

Функция $f(x)$ *называется подынтегральной функцией,* $f(x)dx$ − *подынтегральным* выражением.

Если $F(x)$ - какая-нибудь первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{3}$$

где C - произвольная постоянная. Нахождение неопределенного интеграла называется *интегрированием функции* $f(x)$. Чтобы найти интеграл, надо выполнить действия, обратные дифференцированию.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

3. $\int F'(x)dx = F(x) + C$;

4. $\int dF(x) = F(x) + C$;

5. $\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

6. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;

где k - постоянный множитель, отличный от нуля.

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$;

2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\quad \alpha \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4. $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$; $\qquad (a > 0, \quad a \neq 1)$

5. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$;

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + C$;

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C$;

2. Методы интегрирования

На практике при вычислении неопределенных интегралов их стараются свести к табличному виду различными методами. Рассмотрим некоторые из них.

Метод разложения (непосредственного интегрирования)

Этот метод заключается в разложении подынтегральной функции с использованием свойств неопределенного интеграла в линейную комбинацию основных табличных интегралов.

Пример1 . $\int (e^x + 4x^3)dx = \int e^x dx + \int 4x^3 dx = e^x + 4\frac{x^4}{4} + C = e^x + x^4 + C.$

Метод замены переменной

Пример 2. Пусть требуется найти интеграл $\int \cos(ax+b)dx$, где $a \neq 0$.

Введем переменную $t=ax+b$; Тогда $dt=adx$, откуда $dx=\frac{dt}{a}$, Таким образом

$$\int \cos(ax+b)dx = \int \cos t \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\sin t + C$$

Возвращаясь к переменной x , окончательно имеем

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C \quad .$$

Пример 3. Найти $\int xe^{x^2} dx$. Положим $t=x^2$; Тогда $dt=2xdx$, откуда $xdx=\frac{dt}{2}$; таким образом

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{e^t}{2} + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $\upsilon(x)$- непрерывно дифференцируемые функции на некотором промежутке. Тогда дифференциал их произведения равен

$$d(u\upsilon)=ud\upsilon+\upsilon du, \tag{4}$$

Проинтегрируем (4) по x . Имеем

$$u\upsilon = \int ud\,\upsilon+\upsilon du$$

откуда

$$\int ud\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du\,, \tag{5}$$

Равенство (5) называется *формулой интегрирования по частям*. Она позволяет нахождение одного интеграла свести к нахождению более простого интеграла.

Пример 4. Найти $\int xarctgxdx$. Положим $u=arctgx$. Тогда $du=\dfrac{dx}{1+x^2}$, $\upsilon=\dfrac{x^2}{2}$ и по формуле интегрирования по частям получим

$$\int xarctgxdx=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$
$$=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}arctgx+C=\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+C$$

Пример 5. Найти $\int x\ln xdx$; Положим $u=lnx$, $d\upsilon=xdx$.

Тогда $du=\dfrac{dx}{x}$, $\upsilon=\dfrac{x^2}{2}$ и по формуле интегрирования по частям будем иметь

$$\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C\,.$$

3. Цель деятельности студентов на занятии:

Студент должен знать:

1.Определение первообразной функции.

2.Определение неопределенного интеграла.

3.Понятия подынтегральной функции, подынтегрального выражения, произвольной постоянной интегрирования, переменной интегрирования.
4.Таблицу основных интегралов.
5.Основные свойства неопределенного интеграла.
6.Основные методы интегрирования.

Студент должен уметь:
Вычислять неопределенные интегралы с помощью:
1) метода разложения (метода непосредственного интегрирования);
2) метода замены переменной интегрирования (метода подстановки);
3) метода интегрирования по частям.

4. Содержание обучения:
Теоретическая часть:
1.Первообразная функции.
2.Неопределенный интеграл.
3.Основные свойства неопределенного интеграла.
4.Основные табличные интегралы.
5.Основные методы интегрирования:
a) метод разложения (метод непосредственного интегрирования);
b)метод замены переменной интегрирования (метод подстановки);
c) метод интегрирования по частям.

Практическая часть:
1. Найдите интегралы, используя метод разложения:

1) $\int \frac{1-3x}{x^2}dx$; 4) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$;

2) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x)dx$; 5) $\int \left(3x^2+\frac{4}{x}\right)dx$;

3) $\int (\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+e^x)dx$; 6) $\int (5\cos x - x)dx$.

2. Найдите интегралы методом замены переменной:

1) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$; 4) $\int \sin x \cos^4 x dx$;

2) $\int \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)^2}$; 5) $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$;

3) $\int \frac{2e^x}{(2+e^x)^2}dx$; 6) $\int ctg x dx$.

3. Найдите интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int x\cos x dx$;

2) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$;

3) $\int e^x \sin x dx$;

4) $\int x^2 \ln x dx$;

5) $\int x e^{3x} dx$;

6) $\int e^x \cos x dx$.

5. Перечень вопросов для проверки исходного уровня знаний:

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Приведите основные свойства неопределенного интеграла.
3. В чем состоит метод замены переменной интегрирования?
4. Запишите формулу интегрирования по частям.

6. Перечень вопросов для проверки конечного уровня знаний:

1. Является ли метод интегрирования по частям универсальным? В каких случаях следует его использовать?
2. Какие две основные задачи, связанные с физическим и геометрическим истолкованием производной, решаются с помощью интегрирования?
3. Как проверить правильность нахождения неопределенного интеграла?

7. Хронокарта учебного занятия:

1. Организационный момент – 5 мин.
2. Разбор темы –15 мин.
3. Решение примеров и задач – 45 мин.
4. Текущий контроль знаний – 20 мин.
5. Подведение итогов занятия – 5 мин.

8. Перечень учебной литературы к занятию:

1. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. М., «Медицина», 2010, §§ 5.1 – 5.4.

2. Павлушков И.В. и др. Основы высшей математики и математической статистики. М., «ГЭОТАР-Медиа», 2008, §§ 4.1, 4.

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

1. Научно-методическое обоснование темы:

Понятие определенного интеграла используют в ряде практических задач, в частности в задачах по вычислению площадей плоских фигур, расчету работы, производимой переменной силой, нахождению среднего значения функции.

2. Теория:

Рассмотрим задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

1. Задача о нахождении площади криволинейной трапеции

Пусть дана неотрицательная функция *y=f(x),* график которой изображен на рис.1.

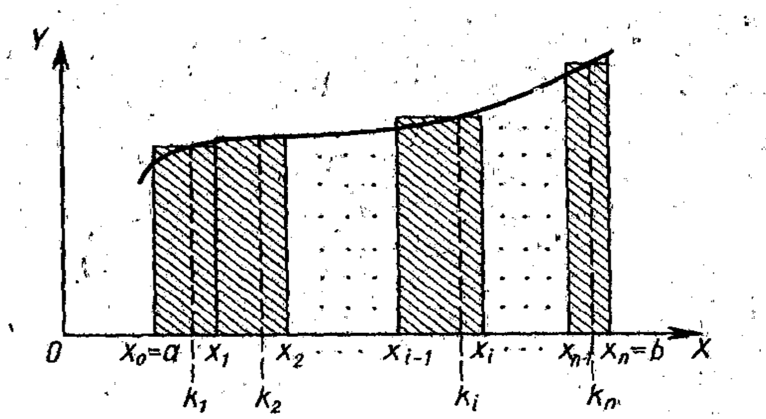


Рис.1

Выберем на оси *OX* точки a и b и восставим из них перпендикуляры до пересечения с кривой. Фигура, ограниченная кривой, перпендикулярами и осью *OX*, называется криволинейной трапецией. Вычислим площадь этой трапеции. Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ на n частичных отрезков точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

Внутри каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ длины $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ выберем произвольную точку k_i $(i = 1,2,3,\ldots n)$. Составим произведения $f(k_1)\Delta x_1,\ f(k_2)\Delta x_2, \ldots$

Каждое такое произведение равно площади прямоугольника с основанием $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots.$ и высотой, равной значению функции $f(x)$ в произвольной точке соответствующего отрезка. Сумма таких произведений

$$\sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и равна площади всех прямоугольников.

Если каждый из отрезков достаточно мал, т.е. $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$ и т.д., то площадь заштрихованной области (рис.1) стремится к площади криволинейной трапеции, равной

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

Таким образом, задача о вычислении площади криволинейной трапеции сводится к определению предела интегральной суммы (1) .

2. Задача о вычислении работы переменной силы

Пусть материальная точка единичной массы перемещается из точки a в точку b оси OX под воздействием переменной силы, направленной вдоль оси OX (т.е., сила является функцией x: $y=f(x)$). Требуется найти работу A этой силы.

Разобьем отрезок $[a,b]$ произвольно на n частей точками (рис.2)

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

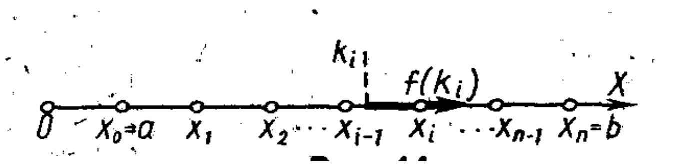


Рис.2

При достаточно мелком разбиении можно считать, что на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ величина силы $f(x)$ почти постоянна и приближенно равна ее значению в некоторой точке k_i ; $f(x) \approx f(k_i)$ для любых точек $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Работа ΔA_i силы на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ тогда будет приближенно равна $f(k_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а работа силы по перемещению массы вдоль всего отрезка $[a,b]$ будет приближенно равна

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i, \qquad (3)$$

Значение работы A будет тем точнее, чем мельче будет разбиение. Поэтому для получения точного значения работы переменной силы на всем отрезке $[a,b]$ необходимо перейти к пределу при $\Delta x_i \to 0, (i = 1,2,3,...., n)$.

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i \qquad (4)$$

Таким образом, и для вычисления работы переменной силы необходимо уметь определять предел интегральной суммы (1).

Функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется *интегрируемой,* если существует такое число I, к которому стремится интегральная сумма (1) при $\Delta x_i \to 0$. Тогда число I называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx \ ;$$

$[a,b]$ - область интегрирования, a называется нижним пределом интегрирования, b - верхним пределом интегрирования. Из сказанного следует, что

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i \,, \qquad (5)$$

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции и работы переменной силы связано с нахождением определенного интеграла.

3. Основные свойства определенного интеграла

1. *Определенный интеграл с равными пределами равен нулю:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \cdot$$

2. *При перемене местами пределов интегрирования величина определенного интеграла изменяется на противоположную:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx \cdot$$

3. *Если отрезок интегрирования* $[a,b]$ *разделен на конечное число* n *частичных отрезков* $[a,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},b]$, *то определенный интеграл от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ *равен сумме определенных интегралов от этой функции на каждом из частичных отрезков (свойство аддитивности):*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx.$$

4. $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \ ,$$

где k *- постоянный множитель.*

5. *Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций, интегрируемых на отрезке* $[a,b]$ *, равен алгебраической сумме определенных интегралов этих функций на данном отрезке:*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ...\int_a^b f_n(x)dx.$$

Величина определенного интеграла от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, равна приращению любой из первообразных для этой функции на данном отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (6)$$

Формула (6) называется *формулой Ньютона-Лейбница.*

Из этой формулы следует, что для вычисления определенного интеграла достаточно найти какую-либо из первообразных для подынтегральной функции и из ее значения, соответствующего верхнему пределу интегрирования, вычесть значение, соответствующее нижнему пределу.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x^4 dx$.

Решение. Первообразной для функции x^4 (имеющей наиболее простой вид), является $\frac{x^5}{5}$. Поэтому в соответствии с формулой Ньютона-Лейбница имеем $\int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}$.

5. Основные методы вычисления определенных интегралов

5.1. Метод разложения (непосредственного интегрирования)

Этот метод основан на использовании свойств определенного интеграла, знании формул простейших неопределенных интегралов и применении формулы Ньютона–Лейбница.

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x + 2\cos x)dx$.

Решение. Воспользуемся свойствами (3) и (4) определенных интегралов:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} xdx + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos xdx.$$

Первообразные для подынтегральных функций найдем с помощью формул простейших определенных интегралов. Далее, используя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$I = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} - \frac{0^2}{2} + 2\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin 0\right) = \frac{\pi^2}{18} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) = \frac{\pi^2}{18} + \sqrt{3}.$$

5.2. Метод замены переменной (метод подстановки)

Этот метод основан на замене переменной интегрирования в определенном интеграле с целью свести его вычисление к вычислению такого определенного интеграла, который может быть вычислен методом разложения.

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int_1^3 e^{2x} dx$.

Решение. Введем новую переменную $t = 2x$; Тогда $dt = 2dx$, откуда $dx = \frac{dt}{2}$.

При замене переменной интегрирования в определенном интеграле необходимо одновременно заменить пределы интегрирования на соответствующие . Имеем: при $x = 1$ $t = 2$, при $x = 3$ $t = 6$. Отсюда следует, что новым нижним пределом интегрирования будет значение 2, а новым верхним – значение 6. Таким образом

$$I = \int_1^3 e^{2x} dx = \int_2^6 e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_2^6 e^t dt = \frac{1}{2} e^t\Big|_2^6 = \frac{1}{2}(e^6 - e^2) = \frac{1}{2} e^2 (e^4 - 1).$$

Замечание. Если при замене переменной в неопределенном интеграле мы от новой переменной t возвращались к первоначальной переменной x, то при замене переменной в определенном интеграле в этом нет необходимости.

5.3. Метод интегрирования по частям

Этот метод основан на использовании следующей *формулы интегрирования по частям:*

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du\ , \tag{7}$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a,b]$.

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^{\pi} x\cos x dx$.

Решение. Данный интеграл не может быть вычислен непосредственно ни методом разложения, ни методом замены переменной. Положим $u = x,\ dv = \cos x dx$. Найдем отсюда $du = dx, v = \sin x$. Тогда

$$I = \int_0^{\pi} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x dx = \pi\sin\pi - 0\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2$$

6. Несобственные интегралы

Понятие определенного интеграла вводилось в предположении:

1) конечности отрезка интегрирования $[a,b]$,

2) непрерывности подынтегральной функции $f(x)$ на этом отрезке.

При соблюдении этих условий интеграл называют *собственным определенным интегралом*. Если же хотя бы одно из них не соблюдается, то соответствующий интеграл называют *несобственным*.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a,+\infty)$. Тогда для любого числа $b > a$ функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует. Будем рассматривать его как функцию верхнего предела b и перейдем к пределу при $b \to +\infty$. Положим

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Стоящий в левой части этого равенства интеграл называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$.

Если

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.* В противном случае (когда предел бесконечен или не существует) говорят, что несобственный интеграл *расходится*.

Аналогично вводится несобственный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на полупрямой $(-\infty, b]$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл от непрерывной функции на всей прямой $(-\infty,+\infty)$ определяется равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c - произвольно фиксированная точка. При этом говорят, что он сходится, если сходится каждый из двух несобственных интегралов в правой части этого равенства, и расходится, если хотя бы один из несобственных интегралов справа расходится.

Пример 5. $$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-b}+1\right] = 1$$

и данный несобственный интеграл сходится.

Пример 6. $$\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \cos x dx = \lim_{b\to+\infty}(\sin x\Big|_0^b) = \lim_{b\to+\infty}\sin b$$

Но $\lim\limits_{b\to+\infty}\sin b$ не существует. Следовательно, данный несобственный интеграл расходится.

Пример 7 .

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} arctgx\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Таким образом, данный несобственный интеграл сходится и равен π .

7. Некоторые приложения определенного интеграла

7.1. Вычисление площадей плоских фигур

Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла: *площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми линиями $x=a$ и $x=b$, численно равна определенному интегралу от этой функции на отрезке* $[a,b]$:

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Если плоская фигура ограничена прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ и кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, причем $f_1(x)<f_2(x)$ $(a<x<b)$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx, \tag{8}$$

В частном случае, когда плоская фигура ограничена снизу осью *OX*, формула (8) упрощается:

$$S=\int_a^b f_2(x)dx, \tag{9}$$

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми (рис.3) $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$.

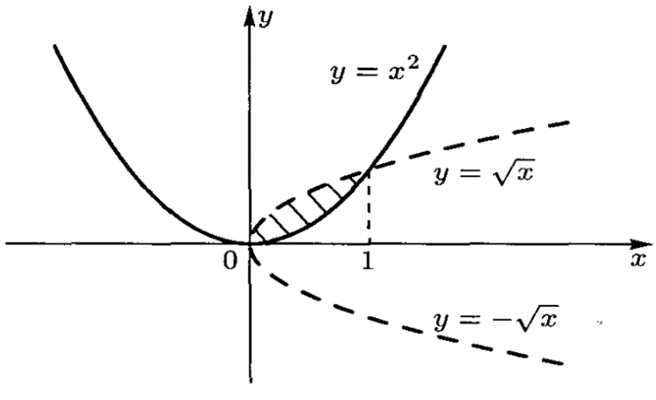


Рис.3

Решение. Найдем точки пересечения кривых : $\sqrt{x}=x^2$, следовательно $x=x^4$. Отсюда $x_1=0$, $x_2=1$ и по формуле (8) имеем

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

7.2. Работа переменной силы

Сравнивая формулу (4) с формулой (5) для определенного интеграла, приходим к выводу, что *работа переменной силы $f(x)$, действующей на материальную точку при перемещении ее из точки $x=a$ в точку $x=b$, численно равна определенному интегралу от этой силы на отрезке* $[a,b]$:

$$A=\int_a^b f(x)dx, \qquad (10)$$

Пример 9. Найти величину работы, которую необходимо совершить для растяжения пружины от положения равновесия на величину l=0,1 *м*, если коэффициент упругости пружины k=200 *Н/м.*

Решение. В соответствии с законом Гука для растяжения пружины на величину x необходимо приложить силу $f(x)=kx$.

Подставляя это выражение в (10) , получим зависимость работы A приложенной силы от растяжения l пружины:

$$A=\int_0^l kxdx=k\frac{x^2}{2}\Big|_0^l=\frac{kl^2}{2}.$$

Подставив в эту формулу численные значения, окончательно получим:

$$A=\frac{200\cdot 0{,}1^2}{2}=1(Dж).$$

7.3. Нахождение средних значений функций

Средним значением функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a,b]$ называется величина $\overline{f}$, определяемая соотношением:

$$\overline{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \qquad (11)$$

Пример 10. Найдем среднее значение функции $y=\sin x$ на отрезке $[0,\pi]$.

Решение. В соответствии с формулой (11) имеем:

$$\overline{f}=\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin x dx=\frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^\pi=-\frac{1}{\pi}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{2}{\pi}.$$

3. Цель деятельности студентов на занятии:

Студент должен знать:

1.Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла:

a) вычисление площади криволинейной трапеции;
b) вычисление работы переменной силы;

2. Понятие интегральной суммы.
3. Формулу Ньютона- Лейбница.
4. Основные свойства определенного интеграла.
5. Основные методы вычисления определенных интегралов:
6. Понятие несобственных интегралов.

Студент должен уметь:

1. Вычислять определенные интегралы различными методами:
методом разложения; методом замены переменной интегрирования; методом интегрирования по частям.

2.Вычислять простейшие несобственные интегралы, средние значения функций, площади плоских фигур, работу переменной силы.

4. Содержание обучения:

Теоретическая часть:

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла:
а) о вычислении площади криволинейной трапеции;
б) о вычислении работы переменной силы;
2. Формула Ньютона- Лейбница.
3. Основные свойства определенного интеграла.
4. Основные методы вычисления определенных интегралов;
5. Несобственные интегралы.
6. Некоторые приложения определенного интеграла:
а) вычисление площадей плоских фигур;
б) вычисление средних значений функций;
в) вычисление работы переменной силы;

Практическая часть:

1. Вычислите определенные интегралы методом разложения:

1) $\int_1^8 (\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + e^x)dx$

2) $\int_1^2 (3x^2 + \frac{2}{x})dx$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + 3\cos x)dx$

4) $\int_1^5 \frac{(x+2)^2}{3x}dx$

2. Вычислите определенные интегралы методом замены переменной:

1) $\int_0^9 \sqrt{5-2x}dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tgxdx$

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$

4) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+4}dx$

2. Вычислите определенные интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$

2) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

3) $\int_0^1 arctgxdx$

4) $\int_1^e x\ln xdx$

4. Вычислите несобственные интегралы:

1) $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$

2) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$

5. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y=x^2$ и $y= x^3$.

2) $y=\sqrt{x}$ и $y=x$.

6. Найдите среднее значение функций:

1) $y=\cos x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) $y=\sqrt{x}$ на отрезке $[0,4]$.

7. Вычислите работу переменной силы :

1) $f(x)=4x^5+3x^2+2x$ при перемещении материальной точки вдоль оси абсцисс из положения с абсциссой $x_1=1$ в положение с абсциссой $x_2=4$.

2) $f(x)=e^{2x}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения с абсциссой $x_1=0$ в положение с абсциссой $x_2=2$.

5. Перечень вопросов для проверки исходного уровня знаний:

1. Дайте геометрическую интерпретацию определенного интеграла.
2. Что называется интегральной суммой?
3. Запишите формулу Ньютона-Лейбница
4. Приведите основные свойства определенного интеграла.
5. Что называется несобственным интегралом?
6. Запишите формулу для вычисления средних значений функций.

6.Перечень вопросов для проверки конечного уровня знаний:

1.Можно ли результат вычисления определенного интеграла проверить дифференцированием?

2.На чем основано применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур?

3.Опишите методы интегрирования заменой переменной и по частям.

7. Хронокарта учебного занятия:

1. Организационный момент –10 мин.
2. Разбор темы–30 мин.
3. Решение примеров и задач –90 мин.
4. Текущий контроль знаний –40 мин.
5. Подведение итогов занятия –10 мин.

8. Перечень учебной литературы к занятию:

1. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. М., «Медицина», 2010, §§ 6.1 – 6.7.
2. Павлушков И.В. и др. Основы высшей математики и математической статистики. М., «ГЭОТАР-Медиа», 2008, §§5.1-5.6.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Научно-методическое обоснование темы:

При математическом описании различных физических, химических, биологических процессов и явлений часто используют уравнения, содержащие не только изучаемые величины, но и их производные различных порядков от этих величин. Например, в соответствии с простейшей версией закона размножения бактерий, скорость размножения пропорциональна количеству бактерий в данный момент времени. Если это количество обозначить через N(t), то в соответствии с физическим смыслом производной скорость размножения бактерий представляет собой производную N(t), и на основании упомянутого закона можно записать соотношение $N'(t)=к\cdot N$, где $к>0$ - коэффициент пропорциональности. Полученное уравнение не является алгебраическим, так как содержит не только неизвестную функцию N(t), но и ее производную первого порядка.

1. Теория:

1. *Понятие дифференциального уравнения*

Уравнение, содержащее независимую переменную *x,* искомую функцию $y=f(x)$, а также ее производные $y', y'',$ и т.д. называется *обыкновенным дифференциальным уравнением***.** Общий вид дифференциального уравнения:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Например, $y'+xy-5=0$ – уравнение первого порядка, $y''+6y'+x=0$ – уравнение второго порядка.

Общий вид уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

Общим решением дифференциального уравнения называется функция, удовлетворяющая двум условиям: во-первых, эта функция должна удовлетворять данному дифференциальному уравнению, т.е. при подстановке в уравнение должна обращать его в тождество; во-вторых, количество *произвольных постоянных* в этой функции должно быть равным *порядку* данного уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения *n*-го порядка имеет вид:

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{3}$$

а общее решение дифференциального уравнения I порядка

$$y = f(x, C), \tag{4}$$

Из общего решения путем вычисления постоянных интегрирования, исходя из заданных дополнительных условий, можно найти *частные решения* данного уравнения.

Дифференциальными уравнениями описывают различные процессы в физике, химии, биологии, фармации.

Из уравнений первого порядка рассмотрим уравнения с *разделяющимися переменными* и *однородные* уравнения.

2.Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид $y'=\varphi(x,y)$, причем его правая часть может быть представлена в виде произведения двух отдельных функций: $\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)$. Тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)$$

Преобразуем это уравнение, разделив переменные справа и слева:

$$\frac{dy}{\varphi_2(y)}=\varphi_1(x)dx$$

Общий вид уравнения с разделенными переменными

$$f(y)dy=\varphi(x)dx\,.$$

Уравнение решается непосредственным интегрированием: слева по переменной y и справа по переменной x с прибавлением постоянной интегрирования C:

$$\int f(y)dy=\int\varphi(x)dx \text{ или } F(y)=\Phi(x)+C.$$

Решая это уравнение, находим:

$$y=\psi(x)+C\,.$$

Таким образом, алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными следующий:

а) если уравнение содержит производную, то представить ее в виде $\dfrac{dy}{dx}$;

б) преобразовать уравнение, перенося все члены его, содержащие y, в левую часть, содержащие x – в правую;

в) проинтегрировать по общим правилам левую часть по аргументу y и правую – по аргументу x с прибавлением постоянной интегрирования C.

г) решая полученное уравнение, найти искомую функцию.

Пример1: Найти общее решение уравнения $y'=2xy$ и частное решение, соответствующее условию

$$y=2 \quad \text{при} \quad x=0, \tag{5}$$

Решение. Представим производную y' в виде отношения дифференциалов:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy\,.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = 2xdx;$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int xdx$$

$$\ln y = x^2 + C.$$

Так как в уравнение входит $\ln y$, то постоянную удобнее выразить в виде логарифма:

$$\ln y = x^2 + \ln C$$

$$\ln y - \ln C = x^2$$

$$\ln\frac{y}{C} = x^2$$

Потенцируя это равенство, получим:

$$e^{\ln\frac{y}{C}} = e^{x^2}$$

Отсюда $\frac{y}{C} = e^{x^2}$, и для общего решения имеем

$$y = Ce^{x^2}\,, \tag{6}$$

Для нахождения частного решения подставим начальное условие (5) в (6):
$2 = Ce^0 = C$, т.е. $C=2$ и искомое частное решение будет иметь вид

$$y = 2e^{x^2}\,, \tag{7}$$

3.Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным,* если оно может быть представлено в виде:

$$y'=g\left(\frac{y}{x}\right), \tag{8}$$

Для решения такого уравнения необходимо ввести вспомогательную функцию $u=\dfrac{y}{x}$, что позволяет свести решение уравнения (8) к решению соответствующего дифференциального уравнения с разделяющимися переменными относительно функции u. Действительно, так как $y=xu$, то производную искомой функции у может быть выражена в виде

$$y'=(xy)'=x'u + xu'=u + xu', \tag{9}$$

Подставив выражение (9) в уравнение (8), получим уравнение с разделяющимися переменными относительно вспомогательной функции:

$$u + xu'=g(u), \tag{10}$$

Решая уравнение (10), найдем функцию u, и умножая ее на x, получим искомое общее решение дифференциального уравнения (8).

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2y' = xy + y^2, \tag{11}$$

и найти его частное решение, удовлетворяющее условию

$$y(1) = 2, \tag{11a}$$

Решение. Разделим обе части уравнения (11) на x^2:

$$y' = \frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}, \tag{12}$$

Введем вспомогательную функцию $u=\dfrac{y}{x}$, откуда $y=xu$ и производная $y'=u+xu'$. Подставив это выражение для производной в уравнение (12), с учетом выражения для вспомогательной функции имеем:

$$u + xu' = u + u^2,$$

откуда

$$xu' = u^2, \tag{13}$$

Уравнение (13) является уравнением с разделяющимися переменными относительно вспомогательной функции $u(x)$. Представим u' в виде $\dfrac{du}{dx}$:

$$x\frac{du}{dx}=u^2 \quad .$$

Разделим переменные:

$$\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x} \quad .$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{u}=\ln x+C\,.$$

Отсюда

$$u=-\frac{1}{\ln x+C}\,, \tag{14}$$

Учитывая, что $u=\dfrac{y}{x}$, из (14) находим

$$\frac{y}{x}=-\frac{1}{\ln x+C}\,.$$

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения (11) получаем в виде:

$$y=-\frac{x}{\ln x+C}\,, \tag{15}$$

Для нахождения частного решения этого уравнения используем условие (11а):

$$y(1)=-\frac{1}{\ln 1+C}=2 \ .$$

Отсюда

$$C=-\frac{1}{2}$$

и для частного решения получаем

$$y=-\frac{x}{\ln x-\dfrac{1}{2}} \quad , \tag{16}$$

3. Задачи на составление дифференциальных уравнений

1.*Задача о скорости размножения бактерий*. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент имелось 100 бактерий, в течение трех часов их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени.

Решение. Пусть N – количество бактерий в момент времени t. Тогда согласно условию

$$\frac{dN}{dt} = kN, \tag{17}$$

где k - коэффициент пропорциональности. Уравнение (17) представляет собой уравнение разделяющимися переменными и его решение имеет вид:

$$N = Ce^{kt}, \tag{18}$$

Из начального условия известно, что $N(0) = 100$. Следовательно,

$$C = 100 \quad \text{и} \quad N = 100e^{kt}.$$

Из дополнительного условия $N(3) = 200$. Тогда

$$200 = 100e^{kt}, \quad 2 = e^{3k}, \quad e^k = 2^{1/3}.$$

Таким образом, для искомой функции получаем:

$$N = 100 \cdot 2^{t/3}. \tag{19}$$

2. *Задача об увеличении количества фермента*. В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна его начальному количеству x. Первоначальное количество фермента a в течение часа удвоилось. Найти зависимость $x(t)$.

Решение. По условию задачи дифференциальное уравнение процесса имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = kx, \tag{20}$$

где k – коэффициент пропорциональности. Общее решение уравнения (20) (уравнение с разделяющимися переменными) имеет вид:

$$x = Ce^{kt}, \tag{21}$$

Постоянную C найдем из начального условия $x(0) = a$:

$$a = Ce^0 = C.$$

Тогда

$$x(t) = ae^{kt}, \tag{22}$$

Известно также, что $x(1) = 2a$. Значит $2a = ae^k$, отсюда $e^k = 2$ и окончательно имеем

$$x(t) = a2^t. \tag{23}$$

3. Цель деятельности студентов на занятии:

Студент должен знать:

1. Определение обыкновенного дифференциального уравнения.
2. Понятие общего и частного решений дифференциального уравнения.
3. Определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными и алгоритм его решения.
4. Понятие однородного дифференциального уравнения первого порядка и алгоритм его решения.

Студент должен уметь:

Находить решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

4. Содержание обучения:

Теоретическая часть:

1. Понятие дифференциального уравнения.
2. Порядок дифференциального уравнения.
3. Общее и частное решения дифференциального уравнения.
4. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
6. Задачи на составление дифференциальных уравнений.

Практическая часть:

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

1) $y' = 2x^2+1$;
7) $y'(x+1)=1$;

2) $y'=5y$;
8) $e^y y'=1$;

3) $3xdx = 2ydy$;
9) $e^x y'=1$;

4) $x^2 dy - \frac{1}{2} y^2 dx = 0$;
10) $y' = 2x^2 + 1$;

5) $(1 + y)\,dy = (1 - x)\,dx$; 11) $xyy' = 0{,}5$;

6) $(y + 1)\,dx = 2x\,dy$; 12) $4x - 3y^2\,y' = 0$.

2. Решите однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

1) $xy' = y - x$;
2) $x^2 y' = xy + y^2$;
3) $x^2 y' - xy = y^2$;
4) $x^2 y' = xy - 5y^2$;
5) $xy' = y + xtg\frac{y}{x}$;
6) $xy' - y = xe^{\frac{-y}{x}}$.

3. Решите дифференциальные уравнения и найдите их частные решения, соответствующие заданным дополнительным условиям:

1) $y' = \sqrt{x}$ при условии: $y(0) = 5$;

2) $y' - \sin x = 0$ при условии: $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$;

3) $xy' = 5x + y$ при условии: $y(1) = 1$;

4) $xy' = y - x$ при условии: $y(o) = 1$;

5) $x^2 y' - xy = y^2$ при условии: $y(1) = 2$.

5. Перечень вопросов для проверки исходного уровня знаний:

1. Дайте определение обыкновенного дифференциального уравнения.
2. Что называется порядком дифференциального уравнения?
3. Чем отличаются частное и общее решения дифференциального уравнения?

6. Перечень вопросов для проверки конечного уровня знаний:

1.Содержат ли частные решения дифференциального уравнения произвольные постоянные?

2.Приведите последовательность решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

3.Приведите последовательность решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.

7. Хронокарта учебного занятия:

1. Организационный момент –10 мин.
2. Разбор темы–30 мин.
3. Решение примеров и задач −90 мин.
4. Текущий контроль знаний −40 мин.

5. Подведение итогов занятия –10 мин.

8. Перечень учебной литературы к занятию:

1. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. М., «Медицина», 2010, §§ 7.1, 7.2.
2. Павлушков И.В. и др. Основы высшей математики и математической статистики. М., «ГЭОТАР-Медиа», 2008, §§ 6.1 , 6.2.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. КЛАССИЧЕСКОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ, ЗАКОН ПУАССОНА

1. Научно-методическое обоснование темы:

Теория вероятностей изучает закономерности, проявляющиеся при изучении таких экспериментов, конкретный результат которых до их проведения невозможно с определенностью предсказать. Так, при однократном подбрасывании монеты нельзя заранее определить, выпадет герб или цифра. В то же время результаты многочисленных экспериментов показывают, что герб и цифра выпадают примерно в одинаковом количестве.

Таким образом, несмотря на случайных характер результата каждого эксперимента, существуют некоторые закономерности для результатов множества аналогичных экспериментов.

2. Теория:

1.Вероятность случайного события

Теория вероятностей - это раздел математики, изучающий закономерности, присущие случайным событиям массового характера.

Случайным называется событие, наступление которого нельзя достоверно предвидеть. В одних и тех же доступных наблюдению условиях оно *может произойти, может и не произойти*.

Совокупность условий, при которых наступает или не наступает данное случайное событие, называется *испытанием*.

Случайные события принято обозначать большими буквами латинского алфавита: A, B, C, D и т.д.

Относительной частотой случайного события в данной серии испытаний или просто частотой случайного события A называют отношение

$$P^*(A) = \frac{m}{n}, \quad (1)$$

где n- число независимых испытаний, в которых случайные событие A происходит m раз.

Вероятностью случайного события назовем предел, к которому стремится частота события при неограниченном увеличении числа испытаний

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}, \quad (2)$$

Это *статистическое определение вероятности*.

Если при испытаниях нет каких-либо причин, вследствие которых одно случайное событие появлялось бы чаще других (*равновозможные события*), то можно определить вероятность исходя из теоретических соображений:

Вероятностью случайного события можно назвать отношение благоприятствующих случаев к общему числу равновозможных несовместных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (3)$$

Это *классическое определение вероятности*.

2. Виды случайных событий

1.Событие, которое при данном испытании произойдет обязательно, называется *достоверным*, его вероятность равна 1.

Например, достоверным является событие, состоящее в извлечении наугад упаковки аспирина из ящика, в котором находятся только упаковки аспирина.

2.Событие, которое при данном испытании не может произойти, называется *невозможным*, его вероятность равна нулю.

Например, невозможным является событие, состоящее в извлечении наугад упаковки аспирина из ящика, в котором находятся только упаковки анальгина.

3.События называются *несовместными*, если появление любого из них в результате испытания исключает появление других.

Например, если событие A_1 состоит в выпадении цифры 1 при однократном бросании игрального кубика, событие A_2 - в выпадении цифры 2 и т.д., то события $A_1, A_2, \ldots, A_6$ являются несовместными, поскольку осуществление любого из них исключает наступление остальных событий в этом испытании.

4.События называются *совместными*, если появление любого из них в результате испытания не исключает появления остальных.

Например, если событие A_1 состоит в выпадении цифры 1 при однократном бросании игрального кубика, а событие A_2 - в выпадении нечетного числа очков, то эти два события являются совместными, поскольку 1 является нечетным числом.

5.Событие B называется *благоприятствующим* для события A, если при наступлении события B обязательно наступает событие A.

6.События A и B называются *независимыми*, если вероятность наступления каждого из них не зависит от того, наступило ли при этом другое событие.

Например, при одновременном подбрасывании двух монет случайное событие A, состоящее в выпадении герба у одной монеты, и событие B, состоящее в выпадении герба у другой монеты, являются независимыми событиями.

7. Событие B называется *зависимым* от события A, если вероятность наступления события B зависит от того, произошло ли событие A.

Вероятность наступления события B, вычисленная при условии наступления события A, называется *условной вероятностью события B* и обозначается $P(B/A)$.

8.Если два события единственно возможны и несовместны, то их называют *противоположными* и обозначают A и $\overline{A}$:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

9. Система событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется *полной*, если в результате испытания обязательно наступает только одно из этих событий. Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1.$$

3. Основные теоремы вероятностей

Теорема сложения вероятностей. *Вероятность наступления случайного события А или несовместного с ним события В равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B), \tag{4}$$

Пример1. В коробке находятся 2 упаковки аспирина, 3 – анальгина и 5 – цитромона. Наугад извлекается одна упаковка, Какова вероятность того, что ею окажется упаковка аспирина или анальгина?

Решение. Вероятность извлечения упаковки аспирина (вероятность события *А*) в соответствии с формулой классической вероятности равна:

$$P(A) = \frac{2}{10} = 0{,}2.$$

Аналогично, вероятность извлечения упаковки анальгина (вероятность события B) равна:

$$P(B) = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Так как данные события являются несовместными (если извлечена упаковка аспирина, то при этом упаковка анальгина не извлечена, и наоборот), то для нахождения искомой вероятности в соответствии с теоремой сложения следует сложить найденные вероятности:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5.$$

Теорема умножения вероятностей для независимых событий. *Вероятность наступления двух независимых случайных событий А и В равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B), \tag{5}$$

Пользуясь этой теоремой, легко определить, например, вероятность выпадения гербов на двух подбрасываемых монетах. Поскольку событие A, состоящее в выпадении герба у первой монеты, и событие B, состоящее в выпадении герба у второй монеты, являются независимыми и вероятности каждого из них равны 0,5, то по формуле (5) получим:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Теорема умножения вероятностей для зависимых событий. *Вероятность наступления случайного события A и зависящего от него события B равна произведению вероятности события A на условную вероятность события B:*

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A), \tag{6}$$

Пример 2. В коробке находятся 2 упаковки аспирина и 3 упаковки анальгина. Наугад извлекают одну упаковку и, не возвращая ее в коробку, извлекают наугад еще одну упаковку. Найти вероятность того, что обе извлеченные упаковки окажутся с аспирином.

Решение. Пусть случайное событие A состоит в том, что первая извлеченная упаковка окажется с аспирином. Вероятность этого события в соответствии с классическим определением вероятности равна:

$$P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Случайное событие B, состоящее в том, что вторая извлеченная упаковка окажется с аспирином, является зависимым от события A, т.к. в случае наступления события A в коробке останется только одна упаковка с аспирином из четырех и вероятность события B будет равна:

$$P(B/A) = 0{,}25.$$

Тогда вероятность того, что обе извлеченные упаковки окажутся с аспирином, находится по формуле (6):

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1.$$

4. Повторные независимые испытания

Повторными независимыми испытаниями называют испытания, удовлетворяющие следующим условиям:

1) количество n испытаний конечно;

2) вероятность осуществления случайного события A в каждом из испытаний постоянна:

$$P(A) = p = const.$$

Такая схема испытаний называется *схемой Бернулли*.

Примеры: многочисленные повторные подбрасывания монеты, повторные извлечения наугад одного шара из корзины, содержащей по нескольку шаров различных цветов, при обязательном возвращении каждого шара в корзину после определения его цвета и.т.д.

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления случайного события A равна p, это событие произойдет m раз дается *формулой Бернулли*:

$$P_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}\ p^m\ q^{n-m}, \tag{7}$$

где $q=1-p$ – вероятность ненаступления события в каждом из испытаний.

Пример3. Принимая вероятность появления на свет девочки при рождении ребенка равной 0,5, найти вероятность того, что в семье с 5 детьми 3 девочки.

Решение. Пусть случайное событие состоит в рождении девочки при появлении на свет каждого из 5 детей в данной семье. Так как вероятность появления девочки при рождении каждого ребенка постоянна (p=0,5), то для нахождения искомой вероятности можно воспользоваться формулой Бернулли:

$$P_5(3)=\frac{5!}{3!(5-3)!}0{,}5^3(1-0{,}5)^{5-3}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}0{,}125\cdot0{,}25=0{,}3125$$

Если объем n серии независимых повторных испытаний велик, то использование формулы Бернулли сопряжено с вычислительными трудностями. Однако, если n не меньше нескольких десятков, а вероятность наступления случайного события в каждом из испытаний мала *($p\ll1$),* причем $\mu=np$ не превышает 10, то для получения приближенного значения соответствующей вероятности пользуются *формулой Пуассона:*

$$P_n(m)\approx\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}, \tag{8}$$

(8) также называют *«законом редких испытаний».*

Эта формула является приближенной, однако получаемые с ее помощью результаты тем ближе к точным, чем больше количество испытаний n.

3. Цель деятельности студентов на занятии:

Студент должен знать:

1. Понятие случайного события.
2. Виды случайных событий.
3. Определение вероятности случайного события.
4. Основные свойства вероятности.
5. Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий.
6. Схему Бернулли.

7. Формулу Бернулли.
8. Формулу Пуассона.

Студент должен уметь:

Находить вероятность события, используя основные теоремы вероятностей, формулы Бернулли и Пуассона.

4. Содержание обучения:

Теоретическая часть:

1.Случайное событие.
2. Виды случайных событий.
3. Основная характеристика случайного события.
4. Классическое определение вероятности случайного события.
5. Основные свойства вероятности случайного события.
6. Статистическое определение вероятности.
7. Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий.
8. Независимые повторные испытания (схема Бернулли).
9. Формула Бернулли.
10.Формула Пуассона.

Практическая часть:

1. В некоторую больницу поступают пациенты с четырьмя видами болезней. Многолетние наблюдения показывают, что этим видам заболеваний соответствуют вероятности: 0,1; 0,4; 0,3; 0,2. Для лечения заболеваний с вероятностью 0,1 и 0,2 необходимо переливание крови. Какое количество больных необходимо обеспечить кровью, если в течении месяца поступило 1000 больных?
2.Вероятность заболевания гепатитом для жителей некоторой области в определенный период года составляет 0,0005. Оценить вероятность того, что из обследованных 10000 жителей 4 окажутся заболевшими.
3. Найдите вероятность того, что из четырех облигаций выиграет:
- только одна,
- по крайней мере одна.
Вероятность выигрыша отдельной облигации равно 0,1.
4. В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся окрашенными.
5. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.
6. Два равносильных соперника играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одну партию из двух или две из четырех?
7. В одном аквариуме находятся 5 белых, 4 красных и 3 голубых рыбки. Двух случайно выбранных рыбок переносят в другой аквариум. Какова вероятность того, что обе рыбки голубые?
8. На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность сорвать в темноте цветную астру, если срывают одну астру?

9. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для 1-го стрелка равна 0,7, а для 2-го стрелка-0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.
10. В цехе работает 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наугад отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.
11. Некто написал 3 письма, запечатал их в конверты, а затем наугад на каждом из них написал различные адреса. Определить вероятность того, что на всех конвертах написаны правильные адреса.
12. Шесть человек больны заболеванием, для которого коэффициент выздоровления составляет 98%. Какова вероятность того, что:

а) выздоровеют все шестеро;

б) выздоровеют только пятеро?

13. Монету бросают шесть раз. Найти вероятность того, что герб выпадет:

а) менее двух раз;

б) не менее двух раз.

14. Производится серия из 4 выстрелов по мишеням с вероятностью попадания в каждом выстреле p=1/4. Предполагая, что результаты выстрелов – события независимые, найти вероятность того, что будет хотя бы два попадания.
15. В группе из 15 студентов 5 сдали коллоквиум по физике на «отлично» и 6- на «хорошо». Какова вероятность того, что наугад выбранный из этой группы студент сдал коллоквиум на «хорошо» или «отлично».
16. Вероятность осуществления некоторой химической реакции при проведении химического эксперимента определенного вида равна 0,9. Найти вероятность того, что данная реакция произойдет в двух последовательно проведенных экспериментах.
17. Принимая вероятность появления мальчика при рождении ребенка равной 0,5, найти вероятность того, что в семье с 6 детьми:

а) мальчиков нет;

б) 4 мальчика;

в) все дети – мальчики.

18. Монету подбрасывают 8 раз подряд. Какова вероятность того, что герб выпадет 5 раз?
19. Среди семян ржи 0,4 % семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?
20. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут три негодных изделия из отправленной партии.

5. Перечень вопросов для проверки исходного уровня знаний:

1. Что называется случайным событием?
2. Приведите определения и примеры различных видов случайных событий (достоверные, невозможные, совместные, несовместные и т.д.).
3. Что является основной характеристикой случайного события?
4. Дайте классическое определение вероятности случайного события.
5. Дайте статистическое определение вероятности случайного события.
6. Что называется схемой Бернулли? Запишите формулу Бернулли.
7. Запишите формулу Пуассона.

6. Перечень вопросов для проверки конечного уровня знаний:

1.При каком подходе к определению вероятности случайного события (классическом или статистическом) требуется проведение реальных испытаний? Почему?

2.Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий.

3. В чем состоит закон «редких испытаний»?

7. Хронокарта учебного занятия:

1. Организационный момент – 5 мин.
2. Разбор темы –15 мин.
3. Решение примеров и задач – 45 мин.
4. Текущий контроль знаний – 20 мин.
5. Подведение итогов занятия – 5 мин.

8. Перечень учебной литературы к занятию:

1. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. М., «Медицина», 2010, § 8.1.
2. Павлушков И.В. и др. Основы высшей математики и математической статистики. М., «ГЭОТАР-Медиа», 2008, §7.1.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Научно-методическое обоснование темы:

Многие случайные события могут быть количественно оценены случайными величинами, которые принимают значения в зависимости от стечения случайных обстоятельств.

В практической деятельности медицинский работник постоянно имеет дело с такими величинами (число больных на приеме у врача, температура тела больного, артериальное давление крови, дозировка лекарственного препарата и т.п.) Поэтому надо знать, как получены эти величины, какова их точность. Математической базой этих вопросов являются теория вероятностей и математическая статистика.

2. Теория:

Случайной величиной называют такую величину, которая в результате эксперимента принимает какое-либо одно значение из множества ее возможных значений, причем до эксперимента невозможно предсказать, какое именно. Такими величинами являются количество очков при бросании игрального кубика, количество яблок на дереве, температура больного в наугад выбранное время суток, масса наугад выбранной таблетки некоторого препарата и т.д.

Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины.

1. Дискретные случайные величины

Случайная величина называется *дискретной,* если совокупность всех ее возможных значений представляет собой конечное или бесконечное, но обязательно счетное множество значений, т.е. такое множество, все элементы которого могут быть (по крайней мере, теоретически) пронумерованы и выписаны в соответствующей последовательности.

Такие из перечисленных выше случайных величин, как количество очков, выпадающих при бросании игрального кубика, число посетителей аптеки в течение дня, количество яблок на дереве являются дискретными случайными величинами.

Наиболее полную информацию о дискретной случайной величине дает *закон распределения* этой величины – это соответствие между всеми возможными значениями этой случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины часто задают в виде двухстрочной таблицы, в первой строке которой перечислены все возможные значения этой величины (в порядке возрастания), а во второй -соответствующие этим значениям вероятности:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Так как все возможные значения дискретной случайной величины представляют полную систему, то сумма вероятностей равна единице (*условие нормировки)*:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \tag{1}$$

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать также с помощью формулы, позволяющей для каждого возможного значения этой величины определить соответствующую вероятность.

Например, *биномиальный закон распределения* определяет случайную величину X как количество появлений некоторого случайного события A в серии из конечного количества n независимых повторных испытаний, т.е. испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли. При этом вероятность каждого возможного значения величины X ($x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2; \dots x_{n+1} = n$) рассчитывают по формуле Бернулли:

$$P_n(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} p^X q^{n-X}\ , \tag{2}$$

где p — вероятность наступления, а $q = 1 - p$ — вероятность ненаступления события A в каждом из испытаний.

Другим примером является *распределение Пуассона*, используемое для задания случайной величины X , определяемой как количество появлений некоторого редкого случайного события A ($P(A) = p \ll 1$) в серии из большого конечного количества n независимых повторных испытаний, причем произведение $\mu = np < 10$. При этом вероятность каждого из возможных значений величины X ($x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2; \dots x_{n+1} = n$) приближенно рассчитывают по формуле Пуассона:

$$P_n(X) \approx \frac{\mu^X}{X!} e^{-\mu}. \tag{3}$$

Для описания определенных особенностей дискретной случайной величины используют ее *основные числовые характеристики*: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение (стандарт).

Математическим ожиданием $M(X)$ (используется также обозначение *«μ»*) дискретной случайной величины *x* называется сумма произведений каждого из всех ее возможных значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n\ , \tag{4}$$

Основной смысл математического ожидания дискретной случайной величины состоит в том, что оно представляет собой *среднее значение* данной величины. Другими словами, если произведено некоторое количество испытаний, по результатам которых найдено среднее арифметическое всех наблюдавшихся значений дискретной случайной величины *X*, то это среднее арифметическое приближенно равно (тем точнее, чем больше количество испытаний) математическому ожиданию данной случайной величины. Приведем некоторые свойства математического ожидания.

1. *Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной величине:*

$$M(C)=C$$

2. *Математическое ожидание произведения постоянного множителя на дискретную случайную величину равно произведению этого постоянного множителя на математическое ожидание данной случайной величины:*
3.

$$M(kX)=kM(X)$$

4. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:*

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)$$

5. *Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$$

Отдельные значения дискретной случайной величины группируются около математического ожидания как центра. Для характеристики степени разброса возможных значений дискретной случайной величины относительно ее математического ожидания вводят понятие дисперсии дискретной случайной величины:

Дисперсией $D(X)$ (используется также обозначение «σ^2») дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=\sigma^2 =M((X - \mu)^2), \qquad (5)$$

На практике дисперсию удобнее вычислить по формуле

$$D(X)=\sigma^2 =M(X^2) - \mu^2, \qquad (6)$$

Перечислим основные свойства дисперсии.

1. *Дисперсия постоянной величины равна нулю:*

$$D(C)=0.$$

2. *Дисперсия любой случайной величины есть число неотрицательное:*

$$D(X)\geq 0.$$

3. *Дисперсия произведения постоянного множителя k на дискретную случайную величину равна произведению квадрата этого постоянного множителя на дисперсию данной случайной величины:*

$$D(kX)=k^2 \cdot D(X).$$

В вычислительном отношении более удобна не дисперсия, а другая мера рассеивания случайной величины X, которая чаще всего и используется – среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение или просто стандарт).

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины называется квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,, \qquad (7)$$

Удобство стандартного отклонения состоит в том, что оно имеет размерность самой случайной величины X, в то время как дисперсия имеет размерность, представляющую квадрат размерности X.

3. Цель деятельности студентов на занятии:

Студент должен знать:

1.Определение случайной величины.
2. Понятие дискретной случайной величины.
3. Определение закона распределения дискретной случайной величины.
4. Основные числовые характеристики дискретной случайной величины.

Студент должен уметь:

1. Составлять закон распределения дискретной случайной величины.
2. Находить основные числовые характеристики дискретной случайной величины.

4. Содержание обучения:

Теоретическая часть:

1. Определение случайной величины.
2. Примеры случайных величин.
3. Понятие дискретной случайной величины.
4. Основные числовые характеристики дискретной случайной величины и их свойства.
5. Биномиальный закон распределения.
6. Распределение Пуассона.

Практическая часть:

1.Число студентов в каждой из 20 групп лечебного факультета составляет соответственно 12, 14, 11, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 10, 13, 14, 15, 16, 10, 15, 13, 14, 12, 15 и 14 человек. Составить закон распределения случайной величины X, определяемой как число студентов в произвольно выбранной группе. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой величины.

2.Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной следующим законом распределения:

X	2	4	6	7
P	0,1	0,2	0,2	0,5

3.Число фармацевтов в каждой из 20 аптек города составляет 3, 6,5,6,4,5,5,4,6,3,5,4,6,5,7,6,4,5,5, и 6 человек. Составить закон распределения случайной величины X, определяемой как число фармацевтов в произвольно выбранной аптеке (из 20 аптек). Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой величины.

4. Составить закон распределения случайной величины X, определяемой как число мальчиков в семье с пятью детьми, если вероятность появления мальчика при рождении каждого ребенка принимается равной 0,51.

5. Найти дисперсию дискретной случайной величины X, определяемой как число появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,2.

6. Построить закон распределения числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания равна 0,4.

5. Перечень вопросов для проверки исходного уровня знаний:

1. Дайте определение случайной величины.
2. Дайте определения дискретной случайной величины. Приведите примеры.
3. Что называется законом распределения дискретной случайной величины?
4. Запишите формулы основных числовых характеристик дискретных случайных величин.

6. Перечень вопросов для проверки конечного уровня знаний:

1. Запишите формулу биномиального закона распределения.
2. Запишите формулу распределения Пуассона.
3. Что называется математическим ожиданием, дисперсией и средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины?
4. Приведите свойства основных числовых характеристик дискретной случайной величины.
5. В чем состоит удобство среднего квадратического отклонения?

7. Хронокарта учебного занятия:

1. Организационный момент – 5 мин.
2. Разбор темы –15 мин.
3. Решение примеров и задач – 45 мин.
4. Текущий контроль знаний – 20 мин.
5. Подведение итогов занятия – 5 мин.

8. Перечень учебной литературы к занятию:

1. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. М., «Медицина», 2010, §8.2.

2. Павлушков И.В. и др. Основы высшей математики и математической статистики. М., «ГЭОТАР-Медиа», 2008, § 7.2.

ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Научно-методическое обоснование темы:

Многие случайные события могут быть количественно оценены случайными величинами, которые принимают значения в зависимости от стечения случайных обстоятельств.

В практической деятельности медицинский работник постоянно имеет дело с такими величинами (число больных на приеме у врача, температура тела больного, артериальное давление крови, дозировка лекарственного препарата и т.п.) Поэтому надо знать, как получены эти величины, какова их точность. Математической базой этих вопросов являются теория вероятностей и математическая статистика.

2. Теория:

1. *Непрерывные случайные величины*

Случайная величина называется *непрерывной*, если множество ее возможных значений представляет собой некоторый конечный или бесконечный промежуток числовой оси.

Например, непрерывными случайными величинами являются: температура больного в фиксированное время суток, масса наугад выбранной таблетки некоторого препарата, рост наугад выбранного студента и др.

Непрерывную случайную величину нельзя задать в виде таблицы ее закона распределения, поскольку невозможно перечислить и выписать в определенной последовательности все ее значения, а также потому, что вероятность любого конкретного значения непрерывной случайной величины равна нулю.

Одним из возможных способов задания непрерывной случайной величины является использование с этой целью соответствующей *функции распределения*.

Функция $F(x)$, равная вероятности того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, называется *функцией распределения* данной случайной величины:

$$F(x)=P(X<x), \tag{1}$$

Свойства функции распределения

1. *Функция распределения удовлетворяет неравенству*:

$$0\le F(x)\le 1, \tag{2}$$

2. *Функция распределения является неубывающей функцией, т.е. из $x_2>x_1$ следует $F(x_2)\ge F(x_1)$.*

3. *Функция распределения стремится к* 0 *при неограниченном убывании ее аргумента и стремится к* 1 *при его неограниченном возрастании.*

График функции распределения в общем случае имеет вид (рис. 1):

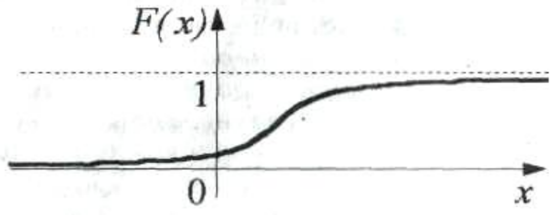


Рис.1

Из определения функции распределения вытекают два важных следствия.

Следствие 1. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу* (a,b), *равна приращению функции распределения на этом интервале:*

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a), \tag{3}$$

Следствие 2. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина в результате испытания примет определенное значение* a, *равна нулю:*

$$P(X = a) = 0, \tag{4}$$

Для задания непрерывной случайной величины можно также использовать *плотность распределения вероятностей.*

Плотностью распределения вероятностей (плотностью вероятности) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная функции распределения $F(x)$ этой величины:

$$f(x)=F'(x), \tag{5}$$

Свойства плотности распределения вероятностей:

1. *Плотность вероятности является неотрицательной функцией:*

$$f(x)\geq 0, \tag{6}$$

2. *Вероятность того, что в результате испытания непрерывная случайная величина примет какие-либо значения из интервала (a; b), равна:*

$$P\ (a<X<b)=\int_a^b f(x)dx, \tag{7}$$

3.*Определенный интеграл в пределах от -∞ до +∞ от плотности вероятности непрерывной случайной величины равен единице (условие нормировки):*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \tag{8}$$

4.*Определенный интеграл в пределах от -∞ до x от плотности вероятности непрерывной случайной величины равен функции распределения этой величины:*

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x), \tag{9}$$

Под основными числовыми характеристиками непрерывной случайной величины понимают, как и в случае дискретной случайной величины, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины:

$$M(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \tag{10}$$

Дисперсия непрерывной случайной величины:

$$D(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx, \tag{11}$$

Среднее квадратическое отклонение, как и для дискретной случайной величины, определяется формулой:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \tag{12}$$

2. Нормальный закон распределения

Из известных видов распределения непрерывных случайных величин наиболее часто используют *нормальное распределение*, которое задается *законом Гаусса.* К нормальному закону распределения при весьма часто встречающихся условиях приближаются другие законы. Так, если мы имеем сумму большого числа независимых величин, подчиненных каким угодно законам распределения, то при некоторых общих условиях она будет приближенно подчиняться нормальному закону.

Непрерывная случайная величина называется *распределенной по нормальному закону (закону Гаусса)*, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{13}$$

где μ - математическое ожидание; σ^2 - дисперсия; σ - среднее квадратическое отклонение этой величины.

График плотности вероятности нормального закона распределения (*кривая Гаусса*) приведен на рис 2

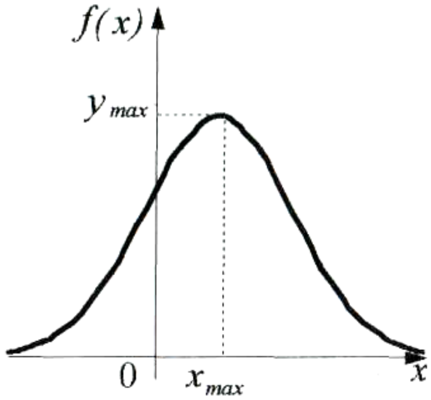


Рис.2

График симметричен относительно вертикальной прямой $x_{max} = \mu$, причем точке $x_{max} = \mu$ функция имеет максимум, равный $y_{\max} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Подставив выражение (13) для плотности вероятности нормально распределенной случайной величины в (7), получим вероятность того, что в результате испытания нормально распределенная случайная величина примет значение из интервала (a,b)*:*

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \tag{14}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{15}$$

где $u = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$.

Тогда формулу (14) можно преобразовать к виду, удобному для практического применения

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \tag{16}$$

Функция $\Phi(u)$ является нечетной, т.е. $\Phi(-u)$ = $-\Phi(u)$; ее значения берутся из соответствующих таблиц.

Пользуясь (16), найдем вероятность того, что значение нормально распределенной случайной величины не выходит за пределы интервала $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$:

$$P(\mu - 3\sigma \prec X \prec \mu + 3\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973.$$

Это значение близко к единице. Нормально распределенная случайная величина теоретически может принимать любые значения из интервала $(+\infty, -\infty)$. Но на практике ее значения обычно не выходят за пределы интервала $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ и имеет место ***правило трех сигм***: *отклонения значений нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине практически не превышают ее утроенного среднего квадратического отклонения.*

3.Цель деятельности студентов на занятии:

Студент должен знать:

1. Определение случайной непрерывной величины.
2. Способы задания непрерывной случайной величины.
3. Определение функции распределения случайной непрерывной величины.
4. Определение плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.
5. Основные числовые характеристики непрерывной случайной величины.
6. Нормальный закон распределения.

Студент должен уметь:

1. Находить вероятность попадания в заданный интервал значения непрерывной случайной величины, заданной функцией распределения.
2. Вычислять основные числовые характеристики непрерывной случайной величины.
3. Находить вероятность попадания значения нормально распределенной величины в заданный интервал.

4.Содержание обучения:

Теоретическая часть:

1. Понятие непрерывной случайной величины. Способы задания непрерывной случайной величины.
2. Функция распределения случайной непрерывной величины, ее свойства, график.
3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, ее основные свойства.
4. Основные числовые характеристики непрерывной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.
5. Нормальный закон распределения. Кривая Гаусса.

6. Вероятность попадания значения нормально распределенной величины в заданный интервал. Правило трех сигм.

Практическая часть:

1. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной непрерывной величины, заданной плотностью распределения вероятностей *f(x),* равной 1/4 на отрезке [1,10] и 0 во всех остальных точках оси абсцисс.
2. Найдите вероятность попадания в интервал (1,3) значения непрерывной случайной величины, заданной функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, если\, x\le 1,\\ \dfrac{x^2+1}{13}, если\, 1<x\le 3,\\ 1, если\, x>3\end{cases}$$

3.Предполагая, что *pH* крови человека подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием μ=7,2 и средним квадратическим отклонением σ=0,2, найдите вероятность того, что у произвольно выбранного человека уровень *pH* находится между 7,1 и 7,2.

4.Случайная величина *X* распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 6 и 2. Найдите вероятность того, что в результате испытаний X примет значение, заключенное в интервале (4, 8).

5.Предполагая закон распределения роста студентов нормальным с математическим ожиданием μ=175 см и дисперсией σ^2=100 см^2, найдите вероятность того, что рост произвольно выбранного студента окажется в пределах от 180 до 190 см.

6.Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной непрерывной величины, заданной плотностью распределения вероятностей $f(x)$, равной $\frac{1}{3}$ на отрезке $[1,5]$ и 0 во всех остальных точках оси абсцисс.

7.Масса взрослого животного некоторого вида является нормально распределенной случайной величиной со средним значением (математическим ожиданием) 100 кг и средним квадратическим отклонением 5 кг. Найти вероятность того, что масса животного находится в интервале:

А) от 95 до 105 кг,

Б) от 97 до 112 кг.

5.Перечень вопросов для проверки исходного уровня знаний:

1. Дайте определение непрерывной случайной величины.
2. Что называется функцией распределения случайной величины?

3.Что называется плотностью вероятностей непрерывной случайной величины? Как она связана с функцией распределения?

4.Запишите формулы для основных числовых характеристик непрерывной случайной величины.

5.Запишите формулу нормального распределения.

6.Перечень вопросов для проверки конечного уровня знаний:

1.Почему непрерывную случайную величину невозможно задать в виде таблицы ее закона распределения и с помощью формулы?

2.Приведите свойство функции распределения и плотности вероятности непрерывной случайной величины.

3.Начертите кривую Гаусса.

4.Сформулируйте правило трех сигм.

7. Хронокарта учебного занятия:

1. Организационный момент – 5 мин.
2. Разбор темы –15 мин.
3. Решение примеров и задач – 45 мин.
4. Текущий контроль знаний – 20 мин.
5. Подведение итогов занятия – 5 мин.

8. Перечень учебной литературы к занятию:

1. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. М., «Медицина», 2010, §8.2.
2. Павлушков И.В. и др. Основы высшей математики и математической статистики. М., «ГЭОТАР-Медиа», 2008, § 7.2.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБОРКИ, ДИСКРЕТНЫЕ И ИНТЕРВАЛЬНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЯДЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Научно-методическое обоснование темы:

Выборочный метод представляет собой один из основных методов математической статистики – раздела математики, посвященного математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных. При этом систематическими данными называют сведения об объектах достаточно большой совокупности, обладающих определенными признаками.

Например: для выяснения вида закона распределения, а также оценки основных числовых характеристик такой случайной величины, как количество листьев на растениях определенного вида, необходимо провести исследование достаточно большого количества таких растений, затем по результатам высказать определенные соображения о виде закона распределения, а также провести оценку соответствующих числовых характеристик.

С другой стороны очевидно, что ввиду ограниченности количества исследуемых объектов получаемые выводы и численные результаты носят лишь приближенный характер. Степень возможной при этом погрешности, а также надежность полученных результатов можно определить, используя методы математической статистики.

2. Теория:

1. Генеральная и выборочная статистические совокупности

Множество объектов, характеризуемых некоторым качественным или количественным признаком, называется *статистической совокупностью*.

Например, статистической совокупностью является множество растворов химических соединений, различаемых как по цвету (качественный признак), так и по концентрации (количественный признак).

Статистическая совокупность, состоящая из всех объектов, которые (по крайней мере, теоретически) подлежат обследованию, называется *генеральной статистической совокупностью*.

Генеральную совокупность образует, например, множество студентов первого курса вузов страны. Однако, если нас интересует распределение такого признака , как, например, рост студентов, то практически невозможно провести измерение роста всех студентов и обработать эти результаты. Реальным является отбор ограниченного числа студентов, измерение их роста и обработка полученных результатов.

Статистическая совокупность, состоящая из некоторого количества объектов, случайным образом отобранных из соответствующей генеральной совокупности, называется *выборочной статистической совокупностью (выборкой).*

Случайность отбора необходима для того, чтобы свойства выборочной совокупности наилучшим образом отражали соответствующие свойства генеральной совокупности , т.е. чтобы выборка была *представительной (репрезентативной).*

Выборка считается составленной случайным образом, если вероятности попадания в выборку для всех членов генеральной совокупности равны.

Чем больше объектов содержит выборочная совокупность (т.е. чем больше ее *объем*) , тем точнее ее свойства отражают соответствующие свойства генеральной совокупности.

2. Статистический дискретный ряд распределения

Пусть требуется изучить распределение значений признака X у объектов некоторой генеральной совокупности.

Для этого из генеральной совокупности извлекают некоторую выборку объемом.

Пусть в полученной выборочной совокупности наименьшее значение признака x_1 встречается m_1 раз, следующее по величине значение x_2 - m_2 раз,……., x_k - m_k раз.

Наблюдаемые значения признака называются *вариантами*, а числа $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$ - их частотами.

Очевидно, что сумма всех частот равна объему выборки:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = \sum_{i=1}^{k} m_i = n, \tag{1}$$

Результаты наблюдений представим в виде таблицы, в первой строке которой в порядке возрастания перечислены все варианты x_i , во второй – соответствующие им частоты:

Таблица 1

X	x_1	x_2	…..	x_k
m	m_1	m_2	…..	m_k

Такая таблица называется *статистическим дискретным рядом распределения.*

Для графического изображения такого ряда на координатной плоскости откладывают точки $(x_i; m_i)$ и соединяют их отрезками прямых (рис.1)

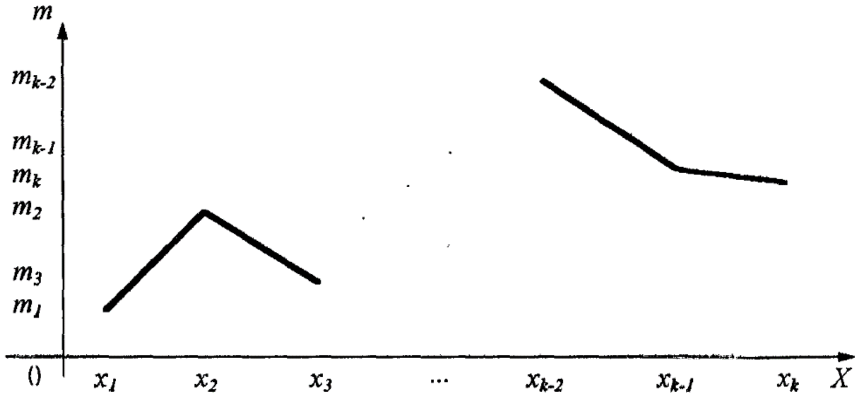


Рис.1

Полученная ломаная линия, являющаяся графическим изображением дискретного статистического ряда распределения, называется *полигоном частот.*

Наряду с частотами m_i часто применяются относительные частоты $p_i = \frac{m_i}{n}$, сумма которых равна единице:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1, \qquad (2)$$

Тогда при построении как самого дискретного статистического ряда распределения , так и его графического изображения, называемого *полигоном относительных частот*, используют не частоты m_i, а относительные частоты p_i.

Пример. При подсчете количества листьев на каждом из 20 комнатных растений определенного вида получены следующие результаты: 11, 10, 9, 10, 7, 11, 11, 13, 10, 8, 12, 10, 9, 12, 9, 10, 8, 12, 11, 10. Составить по этим данным дискретный статистический ряд распределения и построить полигон частот.

Решение. Из полученных результатов видно, что количество листьев на растениях варьируется от 7 до 13. Значение 7 встречается 1 раз, значение 8 – 2 раза, значение 9 – 3 раза и т.д. Таким образом, можно составить следующий дискретный ряд распределения:

Таблица 2

X	7	8	9	10	11	12	13
m	1	2	3	6	4	3	1

Графическим изображением полученного ряда распределения является *полигон частот* (рис.2):

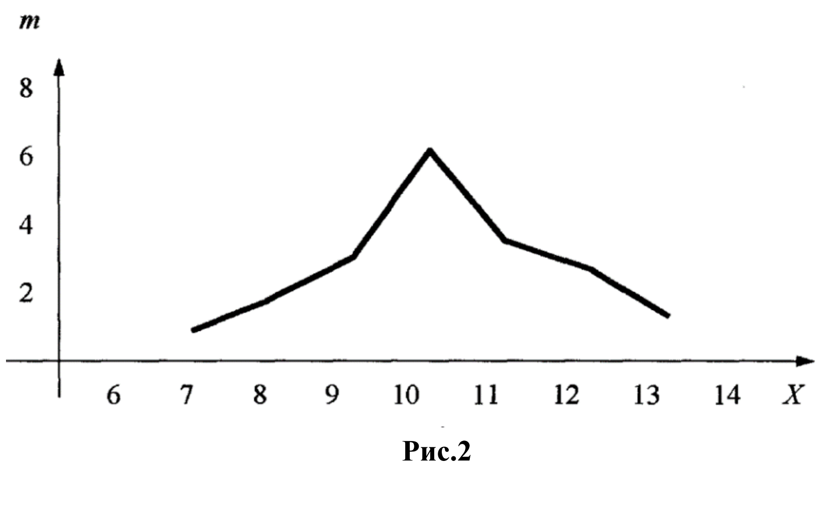


Рис.2

3. Статистический интервальный ряд распределения

Использование дискретного ряда распределения на практике удобно лишь в случае ограниченного (не более 10-20) количества различающихся между собой вариант в выборке. Если же количество таких вариант существенно больше, то результаты представляют в виде *статистического интервального ряда распределения.*

Для построения такого ряда область наблюдаемых значений изучаемого признака разбивается на небольшое количество равных по величине интервалов и фиксируется количество значений признака в каждом интервале (*частота интервала).*

Пусть все наблюдавшиеся значения признака X принадлежат интервалу (a,b).

Разделим этот интервал на k частичных интервалов длиной $\Delta x=\frac{b-a}{k}$ точками деления $a = x_0<x_1<x_2,\dots,<x_{k-1}<x_k=b$ (рис.3):

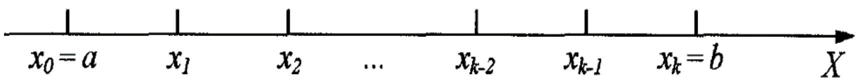


Рис.3

Составим таблицу, в первой строке которой перечислены все частичные интервалы, во второй – соответствующие им частоты (табл.3):

Таблица 3

X	(x_0,x_1)	(x_1,x_2)	(x_2,x_3)	…	(x_{k-2},x_{k-1})	(x_{k-1},x_k)
m	m_1	m_2	m_3	…	m_{k-1}	m_k

Такая таблица называется *статистическим интервальным рядом распределения,* а его графическим изображением является *гистограмма частот* (рис.4):

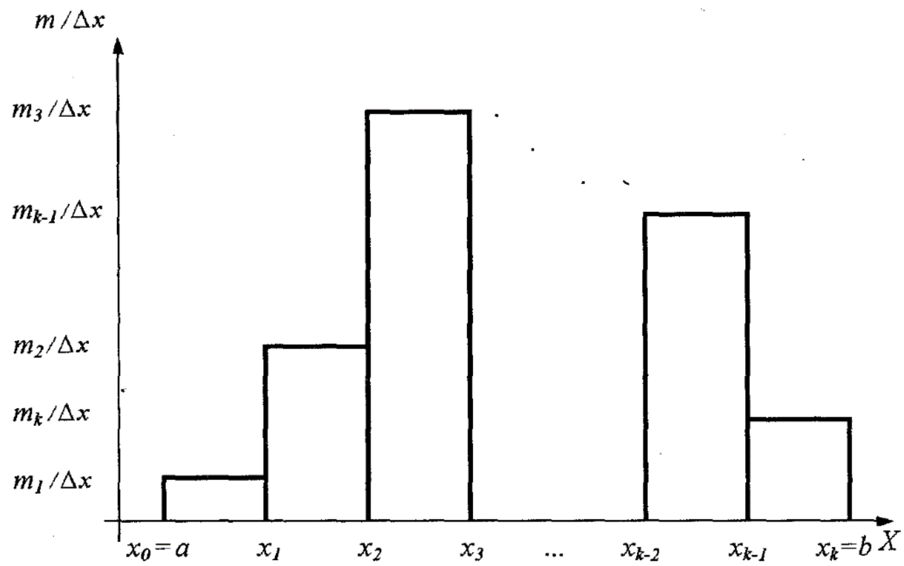


Рис.4

Гистограмма частот – это фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной Δx, а высотами - отношения $\frac{m_i}{\Delta x}$ (*плотности частот*).

На практике часто во второй строке статистического интервального ряда распределения вместо частот m_i указывают *относительные частоты* $p_i = \frac{m_i}{n}$ (табл.4):

Таблица 4

X	(x_0,x_1)	(x_1,x_2)	(x_2,x_3)	…	(x_{k-2},x_{k-1})	(x_{k-1},x_k)
p	p_1	p_2	p_3	…	p_{k-1}	p_k

Тогда графическим изображением такого ряда распределения является *гистограмма относительных частот*, при построении которой по оси ординат откладывают плотность относительной частоты (рис.5):

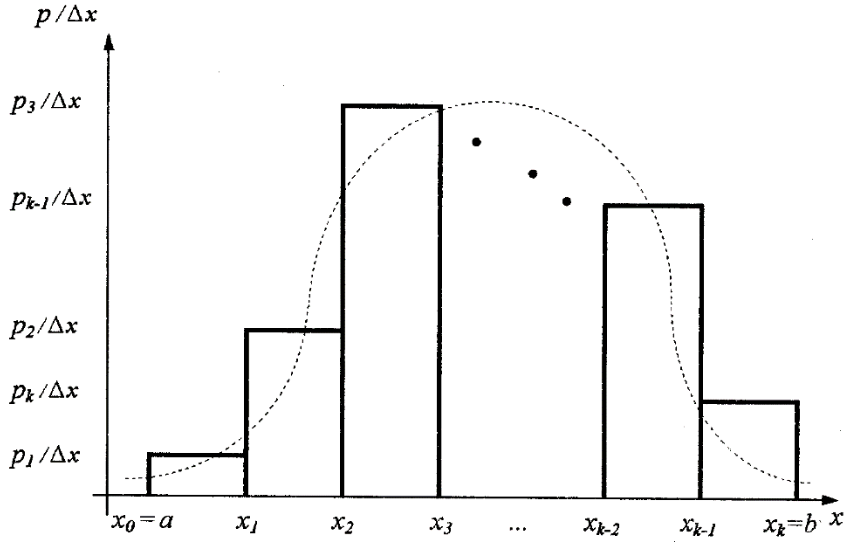


Рис.5

Вид гистограммы относительных частот совпадает с видом гистограммы частот. Преимуществом гистограммы относительных частот является то, что огибающая этой гистограммы (пунктирная линия на рис.5) имеет смысл графика эмпирической плотности вероятности распределения признака *X*.

3. Цель деятельности студентов на занятии:

Студент должен знать:

1. Определение статистической совокупности.
2. Определение генеральной статистической совокупности.
3. Определение выборочной статистической совокупности (выборки).
4. Понятие о статистическом дискретном ряде распределения.
5. Понятие полигона частот и относительных частот.
6. Понятие о статистическом интервальном ряде распределения.
7. Понятие о гистограмме частот и относительных частот.

Студент должен уметь:

1. Строить полигоны частот и относительных частот.
2. Строить гистограммы частот и относительных частот.

4.Содержание обучения:

Теоретическая часть:

1. Определение генеральной и выборной статистической совокупностей. Объем выборки.
2. Статистический дискретный ряд распределения.
3. Полигон частот.
4. Полигон относительных частот.
5. Статистический интервальный ряд распределения.
6. Гистограмма частот.
7. Гистограмма относительных частот.

Практическая часть:

1. Из продукции, произведенной фармацевтической фабрикой, случайным образом отобраны 20 коробочек некоторого препарата, количество таблеток в которых оказалось равным соответственно 48, 52, 50, 49, 51, 50, 47, 50, 49, 50, 51, 52, 48, 51, 50, 47, 49, 46, 53, 50. Представить эти данные в виде дискретного статистического ряда распределения и построить полигон частот, а также полигон относительных частот.
2. Измерение веса Р 30 студентов дало следующие результаты (в кг): 61, 67, 73,74, 80, 68, 69, 57, 88, 82, 70, 60, 75, 76, 90, 76, 75, 58, 62, 79, 61, 69, 85, 82, 80, 66, 71, 82, 83, 80. Построить статистический интервальный ряд распределения величины Р, а также гистограммы частот и относительных частот.
3. При измерении артериального давления у случайным образом отобранных 30 пациентов клиники получены следующие результаты (в мм. рт. ст.): 15!, 166, 133, 155, 179, 148, 143, 128, 138, 172, 163, 157, 158, 136, 169, 153, 142, 147, 134, 164, 167, 131, 152, 156, 161, 154, 149, 122, 176, 145. Представить эти данные в виде интервального статистического ряда распределения и построить гистограмму относительных частот.
4. Изучался рост (см) мужчин возраста 25 лет для сельской местности. По случайной выборке объема 35 получены следующие результаты: 175, 167, 168, 169, 168, 170. 172, 171, 177, 174, 167, 170, 171, 171, 172, 173, 167, 174, 172, 177, 173, 174, 173, 169, 171, 173, 173, 168, 173, 172, 166, 164, 168, 172, 174. Представить эти данные в виде интервального статистического ряда распределения и построить гистограммы частот и относительных частот.

5. Перечень вопросов для проверки исходного уровня знаний:

1. Дайте определение статистической совокупности.
2. Что называется генеральной статистической совокупностью и выборкой?
3. Что называется вариантами и их частотами?
4. Дайте определение статистического дискретного ряда распределения.
5. Что собой представляет полигон частот?

6. Перечень вопросов для проверки конечного уровня знаний:

1.Как строится полигон относительных частот?

2.Опишите построение статистического интервального ряда распределения.

3.Что собой представляют гистограммы частот и относительных частот? (проиллюстрируйте).

4.В чем состоит преимущество гистограммы относительных частот по сравнению с гистограммой частот для непрерывного признака?

7. Хронокарта учебного занятия:

1. Организационный момент – 5 мин.
2. Разбор темы –15 мин.
3. Решение примеров и задач ─ 45 мин.
4. Текущий контроль знаний ─ 20 мин.
5. Подведение итогов занятия – 5 мин.

8. Перечень учебной литературы к занятию:

1. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. М., «Медицина», 2010, §§ 9.1, 9.2.

2. Павлушков И.В и др. Основы высшей математики и математической статистики. М., «ГЭОТАР-Медиа», 2008, § 8.1.

ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ И ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

1. Научно-методическое обоснование темы:

Под выборочными характеристиками распределения будем понимать основные числовые характеристики выборочной статистической совокупности: среднюю выборочную, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение. Ценность этих выборочных характеристик определяется тем, что с их помощью можно оценить соответствующие числовые характеристики генеральной совокупности. Причем различают так называемые *точечные* оценки этих характеристик и их *интервальные* оценки.

2. Теория:

1. Точечные оценки основных числовых характеристик генеральной совокупности

Оценка характеристики распределения называется *точечной,* если она определяется одним числом, которому приближенно равна оцениваемая характеристика.

Генеральной средней $\overline{X}$ дискретной генеральной совокупности называется среднее арифметическое всех значений изучаемого признака X в генеральной совокупности:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \,, \qquad (1)$$

где N – объем генеральной совокупности. Формула (1) имеет лишь теоретическое значение, так как на практике имеют дело не со всей генеральной совокупностью, а только с некоторой выборкой из нее.

Наилучшей оценкой генеральной средней $\overline{X}$ является *средняя выборочная*, определяемая как *среднее арифметическое всех значений изучаемого признака в выборке:*

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i \,, \qquad (2)$$

где m_i - частота встречаемости значения x_i в выборке, k - количество вариант, n - объем выборки.

Математическим выражением того факта, что средняя выборочная представляет собой наилучшую оценку генеральной средней, является приближенное равенство

$$\overline{X} \approx \overline{x} \,, \qquad (3)$$

Генеральной дисперсией σ^2 называется среднее арифметическое квадратов отклонений всех значений изучаемого признака X в генеральной совокупности от генеральной средней:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)^2, \tag{4}$$

Наилучшей оценкой генеральной дисперсии σ^2 является так называемая *исправленная выборочная дисперсия* s^2, определяемая по формуле

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2, \tag{5}$$

Математическим выражением того факта, что исправленная выборочная дисперсия представляет собой наилучшую оценку генеральной дисперсии, является приближенное равенство

$$\sigma^2 \approx s^2, \tag{6}$$

Генеральным средним квадратическим отклонением σ называется квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}, \tag{7}$$

Наилучшей оценкой генерального среднего квадратического отклонения σ является *исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение* s, определяемое по формуле

$$s = \sqrt{s^2}, \tag{8}$$

Математическим выражением того факта, что исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение представляет собой наилучшую оценку генерального среднего квадратического отклонения , является приближенное равенство

$$\sigma \approx s, \tag{9}$$

Пример 1. При подсчете количества листьев на каждом из 20 комнатных растений определенного вида получены следующие результаты: 11, 10, 9, 10, 7, 11, 11, 13, 10, 8, 12, 10, 9, 12, 9, 10, 8, 12, 11, 10. Дать точечные оценки основных числовых характеристик генеральной совокупности.

Решение. Из полученных результатов видно, что количество листьев на растениях варьируется от 7 до 13. Значение 7 встречается 1 раз, значение 8 -2раза, значение 9 – 3 раза и т.д. Таким образом, можно составить следующий дискретный ряд распределения:

X	7	8	9	10	11	12	13
m	1	2	3	6	4	3	1

По формуле (2) найдем среднюю выборочную:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\left(1\cdot 7 + 2\cdot 8 + 3\cdot 9 + 6\cdot 10 + 4\cdot 11 + 3\cdot 12 + 1\cdot 13\right) \approx 10.$$

Таким образом, точечная оценка генеральной средней $\overline{X}$ имеет вид:

$$\overline{X} \approx 10.$$

Используя значение средней выборочной $\bar{x}$, по формуле (5) найдем исправленную выборочную дисперсию:

$$s^2 = \frac{1}{19}\left[1\cdot(7-10)^2 + 2\cdot(8-10)^2 + 3\cdot(9-10)^2 + 6\cdot(10-10)^2 + 4\cdot(11-10)^2 + 3\cdot(12-10)^2 + \right.$$
$$\left. +1\cdot(13-10)^2\ \right] \approx 2{,}4$$

и в соответствии с (6) получим точечную оценку генеральной дисперсии σ^2:

$$\sigma^2 \approx 2{,}4.$$

Далее, по формуле (8) найдем исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение s:

$$s = \sqrt{s^2} \approx \sqrt{2{,}4} \approx 1{,}5.$$

и в соответствии с (9) получим:

$$\sigma \approx 1{,}5.$$

2.Интервальные оценки основных числовых характеристик генеральной совокупности

Оценка характеристики распределения называется ***интервальной***, *если она определяется двумя числами - границами интервала, содержащего оцениваемую характеристику.*

В математической статистике используют так называемые *доверительные интервалы,* соответствующие заданной *доверительной вероятности.*

Доверительной вероятностью (надежностью) оценки числовой характеристики с помощью доверительного интервала называется вероятность того, что эта характеристика находится в данном интервале.

Чем шире доверительный интервал, тем выше соответствующая доверительная вероятность, и наоборот: чем большую доверительную вероятность мы хотим обеспечить, тем большим окажется соответствующий доверительный интервал.

В фармации, медицине и биологии доверительную вероятность принимают равной 0,95 или 0,99.

Рассмотрим метод нахождения доверительного интервала для заданной доверительной вероятности при оценке генеральной средней по результатам выборочных наблюдений. Предполагается, что изучаемый признак в генеральной совокупности распределен по нормальному закону. Метод основан на использовании *распределения Стьюдента* для случайной величины

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{s_{\bar{x}}}, \tag{10}$$

где

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{11}$$

- *исправленное среднее квадратическое отклонение средней выборочной*.

Полуширина доверительного интервала для интервальной оценки генеральной средней при заданной доверительной вероятности γ находится по формуле

$$\Delta x = t_{\gamma}(f) \cdot s_{\bar{x}}, \tag{12}$$

где $t_{\gamma}(f)$ - коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности γ и числа степеней свободы $f = n - 1$. Тогда интервальная оценка генеральной средней представляется доверительным интервалом

$$\left(\bar{x} - \Delta x; \bar{x} + \Delta x\right), \tag{13}$$

в котором с доверительной вероятностью γ находится генеральная средняя $\bar{X}$.

Пример 2. При доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ дать интервальную оценку генеральной средней количества листьев на комнатных растениях определенного вида по данным примера 1.

Решение. Пользуясь вычисленным в примере 1 значением исправленного выборочного среднего квадратического отклонения $s \approx 1{,}5$, по формуле (11) найдем исправленное среднее квадратическое отклонение средней выборочной

$$s_{\bar{x}} \approx \frac{1{,}5}{\sqrt{20}} \approx 0{,}34.$$

По таблицам, для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ и числа степеней свободы распределения Стьюдента $f = n - 1 = 19$ находим соответствующее значение коэффициента Стьюдента: $\gamma_{0,95}(19) \approx 2{,}093$. По формуле (12) для полуширины доверительного интервала получаем: $\Delta x = 2{,}093 \cdot 0{,}34 \approx 1{,}0$.

Учитывая, что $\bar{x} \approx 10$, окончательно получаем, что с доверительной вероятностью 0,95 генеральная средняя $\overline{X}$ количества листьев на комнатных растениях рассматриваемого вида находится в интервале $(9;11)$.

3. Цель деятельности студентов на занятии:

Студент должен знать:

1. Понятие точечной оценки характеристики распределения.
2. Определение генеральной средней дискретной генеральной совокупности.
3. Определение генеральной дисперсии.
4. Определение исправленной выборочной дисперсии.
5. Определение интервальной оценки числовой характеристики.
6. Определение доверительной вероятности и доверительного интервала.
7. Распределение Стьюдента.

Студент должен уметь:

1. Находить точечные оценки основных числовых характеристик генеральной совокупности.
2. Находить интервальные оценки числовых характеристик генеральной совокупности.

4. Содержание обучения:

Теоретическая часть:

1.Точечные оценки основных числовых характеристик генеральной совокупности.

2. Доверительный интервал и доверительная вероятность.

Практическая часть:

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n =50

X	2	5	7	10
m	16	12	8	14

Дать точечную оценку генеральной средней.

2. Дать точечную оценку генеральной дисперсии по данному распределению выборки объема n =100

X	1250	1275	1280	1300
m	20	25	50	5

3. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n =10

X	23,5	26,1	28,2	30,4
m	2	3	4	1

4. При подсчете количества листьев на каждом из 25 комнатных растений определенного вида получены следующие результаты:7, 12, 10, 11, 8, 9, 10, 7, 13, 12, 8, 9, 10, 12, 11, 11, 7, 8, 9, 12, 12, 13, 13, 8, 10. При доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ дать интервальную оценку генеральной средней количества листьев на растениях.
5. При 5- кратном измерении диаметра Д и высоты Н цилиндра получены следующие результаты (в см):

Д	4,00	4,05	3,95	3,90	4,00
Н	5,1	5,0	5,0	4,9	5,1

Дать точечную и интервальную (с доверительной вероятностью, равной 0,95) оценки истинного объема цилиндра.

5. Перечень вопросов для проверки исходного уровня знаний:

1. Какая оценка характеристики распределения называется точечной?

2.Запишите формулы для генеральной средней, выборочной средней, генеральной дисперсии, исправленной выборочной дисперсии, генерального среднего квадратического отклонения, исправленного выборочного среднего квадратического отклонения.

3. Что называется интервальной оценкой числовой характеристики?

4.Дайте определение доверительного интервала и доверительной вероятности.

6. Перечень вопросов для проверки конечного уровня знаний:

1. Чем определяется ценность выборочных характеристик распределения?
2. Запишите формулу распределения Стьюдента для случайной величины.
3. Что называется исправленным средним квадратическим отклонением средней выборочной?
4. Запишите формулу для полуширины доверительного интервала для интервальной оценки генеральной средней при заданной доверительной вероятности.

7. Хронокарта учебного занятия:

1. Организационный момент – 5 мин.
2. Разбор темы –15 мин.
3. Решение примеров и задач ─ 45 мин.
4. Текущий контроль знаний ─ 20 мин.
5. Подведение итогов занятия – 5 мин.

8. Перечень учебной литературы к занятию:

1. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. М., «Медицина», 2010, § 9.3.

2. Павлушков И.В. и др. Основы высшей математики и математической статистики. М., «ГЭОТАР-Медиа», 2008, § 8.2.
3.Ремизов А.Н., Максина А.Г., Потапенко А.Я. Медицинская и биологическая физика. М., «Дрофа», 2008, § 3.2.